И. Е. ОГИЕВЕЦКИЙ

Профессор Днепропетровского Физико-Химико-Математического Института

ОСНОВЫ ПЛОСКОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ДВОУ * ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО

И. Е. ОГИЕВЕЦКИЙ

ПРОФЕССОР ДНЕПРОПЕТРОВСКОГО ФИЗИКО-ХИМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

ОСНОВЫ ПЛОСКОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ГОСТЕХИЗДАТ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВ 1931 ДНЕПРОПЕТРОВСК

Библиографическое описание этого издания помещено в «Літописі Українського Друку, «Картковім репертуарі» и др. указателях Украинской книжной палаты.

Днепропетровск, типография им. 25-л. ВКП Полиграфтреста.
Зак. № 2585.

С.Л.К. Н.К.О. № 2735 от 11/VII-31 г. Тираж 2500 экз. 5¼ печатн. лист. Ост. 364 А5.

ПРЕДИСЛОВИЕ [1])

Работа эта состоит из двух частей. Первая часть представляет собою аналитическое изложение основ плоской кинематической геометрии на основании свойств движения плоской неизменяемой системы точек в своей плоскости. Первая часть содержит семь глав.

В главе I устанавливается, что свойства кривых I-го порядка (по Rafy) могут быть установлены кинематически. Предложение это (см. теорему I, главу I) выясняет общий метод плоской кинематической геометрии.

Главы II и III посвящены кинематическому методу построения нормали и понятию о базе и рулетте.

В главе IV-й автор приводит различные методы построения центра кривизны Mannheim'а и устанавливает метод построения центра кривизны при помощи теоремы II.

В главе V-й излагается новое доказательство теорем о замечательных окружностях, обнаруживающее особенность мгновенного центра I-го порядка, как точки окружности изгибов и центров, к которой он принадлежит. В этой же главе устанавливается аналитический метод кинематического исследования особых точек плоских кривых.

В VI-й главе приводится кинематическое исследование различных кривых (эпициклоиды, конхоиды, циклоиды, подэры и др.).

В этой статье автором приводится также полученное им предложение, обобщающее основные предложения плоской кинематической геометрии и обнаруживающее их взаимообратимость (см. гл. VII).

---

[1]) I — VI гл. изложены в статье под тем же наименованием, напечатан. в «Изв. Екатеринославского Горного Института» за 1923 г., премированной ВУКСУ в 1925 г.

Глава VII изложена в статье: «Об одном дуалистическом принципе и его приложениях», премированной ВУКСУ в 1925 г.

Часть II состоит из четырех глав. В VIII-й главе устанавливается несколько теорем о плоском треугольнике с мнимыми и вещественными элементами, при помощи которых в IX-й главе устанавливаются основные свойства перемещения гомографически и в частности подобно-изменяемой системы точек. В X-й и XI-й главах исследуются плоские кривые, на основании свойств перемещения плоской изменяемой системы точек в своей плоскости.

ВВЕДЕНИЕ

До восемнадцатого столетия области исследования механики и геометрии были крайне обособлены. Обособленность эта была устранена Эйлером, высказавшим мысль о возможности изучить движение независимо от вызывающих его сил.

Механика и геометрия вследствие этого сближаются: геометрические методы и свойства вводятся в общую теорию движения.

Сближение это, начатое Эйлером, впоследствии углубляется при взаимном проникновении различных методов. В результате — на ряду с численно и качественно возрастающими геометрическими исследованиями свойств движения — ряд исследований геометрических фактов при помощи кинематических методов. Ряд этот и называют «кинематической геометрией».

Мысль о возможности изучать некоторые свойства движения, независимо от производящих его сил, впервые высказана Euler'ом в мемуаре: «Formulae generales pro translatione quacumque corporum rigidorum», помещенном в «Novi Commentarii Academiae Petropolitanae», t. XX, p. 189 [1]). Впоследствии Карно [2]), Вронский [3]) и Ампер [4]) указали на чисто геометрические методы исследования движения. Вронский, по мнению Трансона [5]), впервые назвал науку о движении, независимо от производящих его сил, фрономией. Ампер [6]) предложил для этой науки название «кинематики» от греческого слова «$\varkappa\omega\eta\mu\alpha$».

---

[1]) Note sur l'origine de l'idée de la cinématique. M. Liguine.

[2]) «Essai pour les machines en général». Nouvelle édition, Dijon. 1786.

[3]) Wronski. «Systême architectonique absolu de l'éncyclopedie du savoir humain».

[4]) Ampére. «Essai sur la philosophie des sciences», an 1838, première partie, p. 50.

[5]) Transon. «Loi des series de Vronski; sa phronomie». Nouvelles annales de mathématiques, deuxième serie, t. XIII, an 1874, p. 305.

[6]) «Essai sur la philosophie des sciences», an 1838, p. 52.

Резаль[1]) делит кинематику на 2 части: теоретическую и прикладную, и первую называет «cinématique pure» (чистой кинематикой). Впоследствии чистая кинематика также подвергается дроблению, выделяя из себя «кинематическую геометрию»[2]), которую впоследствии делят на плоскую, сферическую и в пространстве[3]).

Первой основной теоремой кинематической геометрии нужно считать предложение Бернулли[4]) о том, что всякое бесконечно-малое движение неизменяемой плоской фигуры в своей плоскости эквивалентно вращению вокруг определенной точки этой плоскости.

Свойствами движения впервые воспользовался Декарт[5]), который построил касательную к циклоиде. В 1827 году Коши в своем мемуаре: «Sur les mouvements que peut prendre un système invariable libre, ou assujeti à cerlaines conditions»[6]) показывает, что перемещение фигуры в своей плоскости может быть получено катанием одной кривой по другой. Мысль эта более ясно выражена у Шаля в его мемуаре: «Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieures courbes mécaniques»[7]).

В 1830 году[8]) Шаль доказал теорему Бернулли в самом общем виде, а в 1861 году[9]) он указал, что теорема эта справедлива и для случая конечного перемещения.

Из этих теорем Шаль выводит известный метод построения касательных к кривым, механическое происхождение которых известно. Впоследствии Бресс, Aronhold, Transon, Mannheim, Лигин, Creiler и др. занимаются исследованием центров кри-

---

[1]) Resal. «Traité de cinématique pure», an 1862.

[2]) Aronhold. «Vorlesungen über kinematische Geometrie». Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des gewerbfleises in Preusen. 1872.

[3]) «Principes et développements de géométrie cinématique». A. Mannheim, Paris, 1894.

[4]) «De centro spontaneo rotationi». Opera, 1742, t. IV.

[5]) Lettres, edit. 1724, t. II, p. 39.

[6]) «Oevres complètes d'Augustin Cauchy», 2-éme serie, t. VII, p. 101.

[7]) «Bulletin de la societé mathématique de France». 1872.

[8]) «Bulletin de sciences mathématiques de Ferrnsac», t VII, p. 353.

[9]) «Propriétés relatives au déplacement fini quelcondue dans l'espace d'une figure de forme invariable». Comptes rendus. T. LI et LII an 1860 et 1861.

визны, огибающих и других свойств кривых на основании теорем о перемещении плоской неизменяемой системы точек в своей плоскости. Эти исследования и составляют содержание кинематической геометрии, развитием которой наука, главным образом, обязана A. Mannheim'y.

Глава I

О ПЛОСКИХ КРИВЫХ И ИХ СВОЙСТВАХ, УСТАНАВЛИВАЕМЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИ

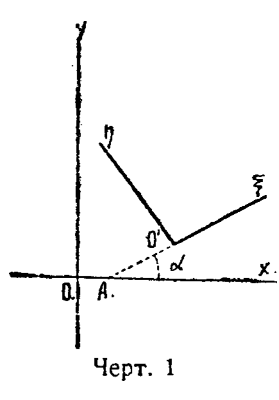
Кривые, описанные точками плоской неизменяемой фигуры при ее перемещении в своей плоскости, будем называть кинематическими.

Установим условия, которым удовлетворяют кинематические кривые.

Пусть задано перемещение плоской неизменяемой системы точек в своей плоскости, т. е. заданы:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha; \\ y &= b + \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

где (x, y) — неподвижные координаты, (ξ, η) — подвижные координаты, (a, b) — координаты подвижного начала O′, α — угол, образованный подвижной и неподвижной осью абсцисс (см. чертеж 1).



Черт. 1

Пусть, кроме того, заданы два условия, определяющие данное перемещение:

$$F_1(a, b, \alpha) = 0; \; F_2(a, b, \alpha) = 0 \quad \ldots (2)$$

то, исключив a, b и α из (1) и (2), найдем кривую, описанную при данном перемещении плоской неизменяемой системы точек в своей плоскости. Итак, кривая, удовлетворяющая (1) и (2), — кинематическая.

Подбирая соответственным образом условия (2), получим ту или иную кривую; например, любая наперед заданная алгебраическая кривая может быть воспроизводима при перемещении коленчатого параллелограмма.

Установим предложение, содержащее общий метод плоской кинематической геометрии и обнаруживающее свойства кривых, подвергаемых кинематическому исследованию.

Лемма I. Пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha \\ y &= b + \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

где α — независимый параметр, a и b — функции этого параметра, ξ и η — переменные, от α независящие.

Тогда при данном α существует вполне определенная система точек: (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots\ldots$, (x_n, y_n), для которых справедливы соотношения:

$$\left[\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\alpha} = 0\right]_{x_1, y_1}; \ldots\ldots \left[\frac{d^n x}{d\alpha^n} = \frac{d^n y}{d\alpha_n} = 0\right]_{xn, yn}$$ [1]

В самом деле, дифференцируя (3) i раз, найдем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^i x}{d\alpha^i} &= \frac{d^i a}{d\alpha} + \xi \cos\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) - \eta \sin\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) \\ \frac{d^i y}{d\alpha^i} &= \frac{d^i b}{d\alpha^i} + \xi \sin\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) + \eta \cos\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Приравняв эти выражения нулю, получаем «n» определенных и совместных систем уравнений в отношении ξ и η; следовательно, существует n точек (ξ_i, η_i), для которых правые части (4) обращаются в нуль.

Тогда, в силу (3), существует также n точек (x_i, y_i), для которых левые части выражений (4) обращаются в нуль.

Замечание I. Т. к. соотношения (3) определяют перемещение плоской неизменяемой системы точек в своей плоскости, а точка (x_i, y_i), для которой $\frac{d^i x}{d\alpha^i} = \frac{d^i y}{d\alpha^i} = 0$, есть мгновенный центр i-го порядка, то лемму I можно выразить так:

«При перемещении плоскости в самой себе в неподвижной плоскости образуются мгновенные центры i-го порядка, где $i = 1, 2, \ldots, n$.»

---

[1] Символ $\left[\frac{d^k u}{dj^k} = \frac{d^k v}{dj^k} = a\right]_{u_k, v_k}$ обозначает, что $\frac{d^k u}{dj^k} = \frac{d^k v}{dj} = a$ в точке (u_k, v_k).

Это — обычная формулировка предыдущего предложения в курсах кинематики. Точки (ξ_i, η_i) называются подвижными мгновенными центрами.

Лемма II. Пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha \\ y &= b + \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

где a, b, ξ, η, α определяются, как в предыдущей теореме.

Тогда переменная U, определенная соотношением:

$$U = \Phi\left(x,\ y, \frac{dx}{d\alpha}, \ldots, \frac{d^n x}{d\alpha^n}, \frac{dy}{d\alpha}, \ldots, \frac{d^n y}{d\alpha^n}\right) \quad \ldots (5)$$

может быть выражена:

$$U = \Psi\ (x,\ y,\ x_1,\ y_1, \ldots, x_n,\ y_n),$$

где x_i, y_i — мгновенный центр i-го порядка.

Подставив в соотношения (4) их корни, найдем $2n$ соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{d^i x}{d\alpha^i}\right]_{(xi,\ yi)} &= \frac{d^i a}{d\alpha^i} + \xi_i \cos\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) - \eta_i \sin\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) = 0 \\ \left[\frac{d^i y}{d\alpha^i}\right]_{(xi,\ yi)} &= \frac{d^i b}{d\alpha^i} + \xi_i \sin\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) + \eta_i \cos\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} . \ (6)$$

откуда в силу (4) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^i x}{d\alpha^i} &= (\xi - \xi_i) \cos\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) - (\eta - \eta_i) \sin\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) \\ \frac{d^i y}{d\alpha^i} &= (\xi - \xi_i) \sin\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) + (\eta - \eta_i) \cos\left(\alpha + \frac{i\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} . \ (7)$$

Подставив в (2) вместо x, y, ξ, η координаты x_i, y_i, ξ_i, η_i мгновенного центра i-го порядка, найдем:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= a + \xi_i \cos\alpha - \eta_i \sin\alpha \\ y_i &= b + \xi_i \sin\alpha + \eta_i \cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8)$$

откуда на основании (3)

$$\begin{aligned} x - x_i &= (\xi - \xi_i) \cos\alpha - (\eta - \eta_i) \sin\alpha \\ y - y_i &= (\xi - \xi_i) \sin\alpha + (\eta - \eta_i) \cos\alpha \end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \xi - \xi_i &= (x - x_i)\cos\alpha + (y - y_i)\sin\alpha \\ \eta - \eta_i &= -(x - x_i)\sin\alpha + (y - y_i)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (9)$$

Тогда (7) перепишется:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^i x}{d\alpha^i} &= (x - x_i)\cos\frac{i\pi}{2} - (y - y_i)\sin\frac{i\pi}{2} \\ \frac{d^i y}{d\alpha^i} &= (x - x_i)\sin\frac{i\pi}{2} + (y - y_i)\cos\frac{i\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (10)$$

Вставив (10) в (5), найдем:

$$U = \Psi(x, y, x_1, y_1, \ldots x_n, y_n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Теорема I. Все задачи о свойствах n-го порядка[1]) кривых имеют кинематическое решение.

В самом деле, из (7) и (13) следует:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi\left(x, y\frac{dx}{d\alpha}, \ldots, \frac{d^n x}{d\alpha^n}, \frac{dy}{d\alpha}, \ldots, \frac{d^n y}{d\alpha^n}\right) = \\ &= \Psi(x, y, x_1, y_1, \ldots x_n, y_n) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (12)$$

где Φ может выражать любое соотношение плоской дифференциальной геометрии, а x, y — координаты мгновенного центра i-го порядка.

---

[1]) Под свойствами n-го порядка кривых подразумеваем, согласно Rafy, свойства, которые выражаются алгебраическими функциями от производных n-го порядка (нормаль, касательная, радиус кривизны и др.).

Глава II

О НОРМАЛЯХ И КАСАТЕЛЬНЫХ К КРИВЫМ, ОПИСАННЫМ ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ПЛОСКОСТИ В САМОЙ СЕБЕ.

Теорема I. Нормаль к кривой в данной точке проходит через мгновенный центр 1-го порядка, соответствующий данному перемещению.

На основании (10) можно написать:

$$\frac{dx}{d\alpha} = y_1 - y; \quad \frac{dy}{d\alpha} = x - x_1.$$

Исключая из нашего рассмотрения случай $\frac{dx}{d\alpha} = 0$ или $y_1 = y$ когда данная точка совпадает с м. ц. 1 п. с. д. п.[1]),

то очевидно, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x_1}{y_1 - y},$$

т.-е.

$$(x - x_1)\, dx + (y - y_1) dy = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание I. Из этой теоремы вытекает метод построения касательных к кривым, механическое происхождение которых задано. Метод этот обнаружен Шалем[2]) синтетически. Установим ряд предложений о построении м. ц. 1 п. с. д. п., определяющего нормаль и касательную в данной точке описанной кривой.

Теорема II. Касательная к кривой E, огибающей последовательные положения кривой C, неизменно связанной с плоской

[1]) М. ц. 1 п. с. д. п. — мгновенный центр 1-го порядка, соответствующий данному перемещению.

[2]) См. Hachette. «Historie des machines à vapeur».

неизменяемой фигурой, перемещающейся в своей плоскости, совпадает с касательной к кривой C в точке ее соприкосновения с кривой E.

В самом деле, изменение положения кривой C зависит от изменения параметра α, характеризующего данное перемещение, так что последовательные положения, которые занимает при перемещении кривая C, представляют собою семейство кривых, зависящих от одного параметра. Вследствие этого кривая E, как огибающая, имеет общую касательную с огибаемыми.

Теорема III. Точки, в которых кривая C, неизменно связанная с перемещающейся фигурой, касается огибающей последовательные ее положения — основания нормалей к кривой C, проходящих через м. ц. 1 п. с. д. п.

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из предыдущих двух предложений.

Теорема IV. Если кривая C, принадлежащая фигуре, перемещающейся в своей плоскости, при любом ее положении проходит через неподвижную точку, то м. ц. 1 п. с. д. п. лежит на нормали к кривой C в этой точке.

В самом деле, рассматривая неподвижную точку, как огибающую последовательные положения кривой C, которую она занимает при перемещении, эта теорема получается из предыдущих.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих теорем.

Теорема V. Точка пересечения нормалей к траэкториям, описанным двумя точками плоской фигуры, перемещающейся в своей плоскости, — м. ц. 1 п. с. д. п.

Теорема VI. Точка пересечения нормалей к огибающим последовательных положений кривых, неизменно связанных с плоской неизменяемой фигурой, перемещающейся в своей плоскости, — м. ц. 1 п. с. д. п.

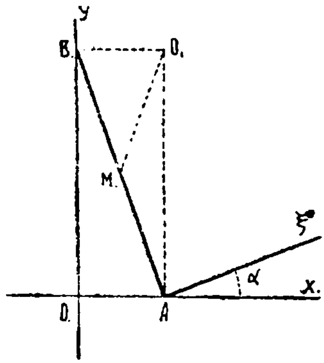
Теорема VII. Точка пересечения нормали к траэктории точки, принадлежащей перемещающейся фигуре, и нормали в неподвижной точке к кривой C, проходящей при любом положении фигуры через эту точку, — м. ц. 1 п. с. д. п.

Теорема VIII. Точка пересечения нормали к траэктории точки перемещающейся фигуры и нормали к огибающей последовательные положения кривой, неизменно связанной с плоской неизменяемой фигурой, перемещающейся в своей плоскости,— м. ц. 1 п. с. д. п.

Теорема IX. Точка пересечения нормали в неподвижной точке к кривой C, проходящей при любом положении фигуры через эту точку, и нормали к огибающей последовательные положения кривой, неизменно связанной с перемещающейся в своей плоскости неизменяемой фигурой, — м. ц. 1 п. с. д. п.

Пример I. Нормаль к эллипсу.

Рассмотрим прямое Карданово движение, осуществляемое несгибаемым и нерастяжимым стержнем AB, перемещающимся в плоскости xOy (см. черт. 2), так что концы его A и B скользят по неподвижным прямым Ox и Oy. Пусть длина AB выражается c. Пусть подвижная ось y-ов совпадает с AB, подвижное начало — с точкой A, подвижная ось x-ов — с перпендикуляром к AB в точке A, т.-е. с $A\xi$.



Черт. 2

Тогда уравнения (1) в этом случае запишутся:

$$x = a - \eta \sin \alpha; \quad y = \eta \cos \alpha \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

где $\alpha = \angle \xi Ax$, a и b — абсцисса и ордината начала подвижных осей, а соотношения (2) выразятся

$$b = O; \quad a^2 + c^2 \cos^2 \alpha = c^2 \quad \ldots \ldots \ldots (14)$$

Откуда

$$\frac{x^2}{(c-\eta)^2} + \frac{y^2}{\eta^2} = 1,$$

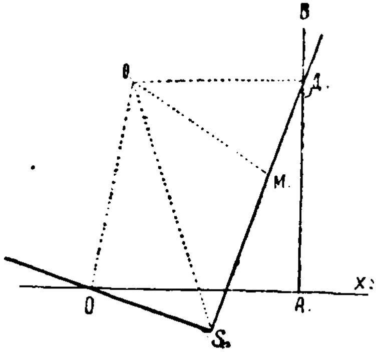
т.-е. всякая внутренняя точка стержня AB описывает эллипс.

Для построения нормали к эллипсу, описанному точкой M, соединяем M с O_1 — точкой пересечения перпендикуляров к Ox и Oy, которая на основании V-й теоремы — м. ц. 1 п. с. д. п.

Пример II. Нормаль к циссоиде и строфоиде.

Пусть угол OSD перемещается в своей плоскости так, что SD скользит по AB, а SO проходит через неподвижную точку O, причем $SD = OA$ (см. черт. 3).

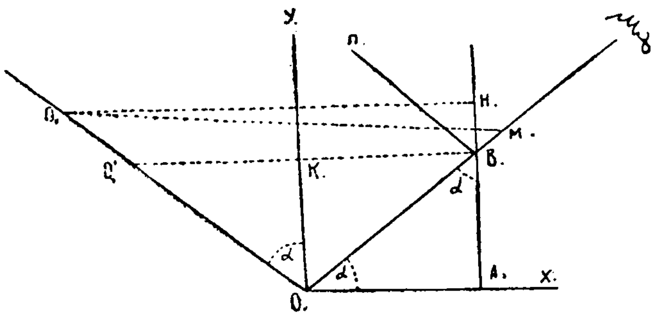
Тогда, как известно, S описывает строфоиду, M — середина прямой SD описывает циссоиду[1]). Восстановив перпендикуляры к AB и OS в D и O, получим точку их пересечения O_1, которая по теореме VII — м. ц. 1 п. с. д. п.; следовательно, O_1S и O_1M — нормали к строфоиде и циссоиде в точках S и M,



Черт. 3

Пример III. Пусть некоторая прямая OM, принадлежащая фигуре, перемещающейся в своей плоскости, постоянно проходит через неподвижную точку O, а H — одна из точек фигуры — описывает прямую AH (см. черт. 4).

За начало неподвижных прямоугольных осей берем точку O, прямую $Ox \perp AH$ за неподвижную ось абсцисс, точку B — пересечение AH с OM — за подвижное начало прямоугольных



Черт. 4

осей, а ΠB — за подвижную ось ординат; кроме того, обозначим $\xi Ox = \alpha$, а отрезки OA и HB, неизменные при перемещении, обозначим: $OA = p$; $HB = q$.

Тогда точка $H(o, q)$ описывает прямую $x = p$, что выражается соотношением:

$$p = a + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha ,$$

[1]) Возможность получать циссоиду при перемещении плоскости в самой себе обнаружена Ньютоном; см. «Journal de l'école polytechnique», Cahier XXXV.

т. - е.

$$a = p + q \sin \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Условие, что неподвижная ось постоянно проходит через неподвижное начало, запишется:

$$b = a \, tg \, \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Условия же:

$$\begin{aligned} x &= a + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \\ y &= b + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \end{aligned}$$

в этом случае запишутся:

$$\left.\begin{aligned} x &= p + q \sin \alpha + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \\ y &= (p + q \sin \alpha) \, tg \alpha + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Откуда

$$\Big[(x - p) \, y - \xi\eta\Big]^2 + \Big[(x - p) \, x + (q - \eta) \, \eta\Big]^2 = \Big[x\xi + (q - \eta) \, y\Big]^2$$

Для точки ($\xi = 0$, $\eta = 0$) уравнение это запишется:

$$(x^2 + y^2) \; (x - p)^2 = q^2 y^2 ,$$

которое в полярных координатах перепишется:

$$r = \frac{q \sin \Theta + p}{\cos \Theta}$$

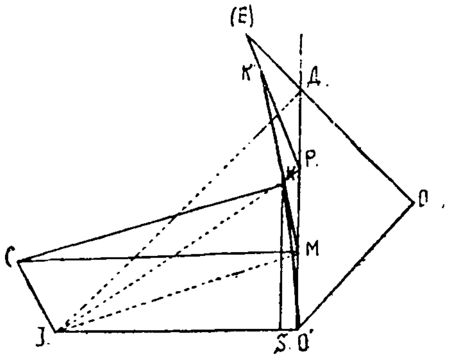
и выражает конхоиду Nicomède'a.

Нормаль к конхоиде строится следующим образом. Так как AH — траэктория точки H, а OB постоянно проходит через неподвижную точку O, то O_1 — точка пересечения $O_1 H \perp AB$ и $OO_1 \perp O\xi$ — мгновенный центр 1-го пор., а нормалью служит прямая, соединяющая O_1 с данной точкой.

Пример IV. Найдем огибающую касательных к различным кривым, описанным всеми точками одного и того же луча, который, при перемещении в некоторой плоскости, во всех занимаемых им положениях проходит через неподвижную точку O'; иначе говоря, нужно найти огибающую семейства конхоид. Пусть $O'L$ — данный луч, точка которого D описывает прямую OD. Тогда J точка пересечения $JD \perp OD$ и $JO' \perp OL'$ — м. ц. 1 п. с. д. п.

Нормали к траэкториям, описанным точками M и P — прямые JP и JM, а MK и PK' — касательные к этим кривым, число которых не ограничено, как и число точек луча $O'L$ (см. черт. 5).

Прямой угол JMK, неизменный при перемещении, сторона которого JM при всех положениях, занимаемых фигурой, проходит через неподвижную точку J, а вершина угла M описывает прямую $O'L$, C — точка пересечения JC с MC — м. д. 1 п. с. д. п. Поэтому точка касания K — основание перпендикуляра, опущенного из C на MK. Геометрическое место точек касания «K» — искомая огибающая (E).



Черт. 5

Для вывода уравнения этой кривой примем за оси координат JO' и $O'L$, обозначив координаты точки K через x и y, а $\angle MJO'$ — через α. Тогда:

$$y = KS = KR + RS = 2O'M$$

ибо $KR = O'M$ (из равенства $\triangle$-ов KRC и MJO'), а $RS = O'M$; следовательно,

$$y = 2O'J\,tg\,\alpha,\ x = O'S = MR = KR tg\,\alpha = -\frac{1}{2}y\,tg\,\alpha = -O'J\,tg^2\,\alpha;$$

откуда

$$y^2 = 4O'J^2\,tg^2\,\alpha = -4O'Jx;$$

обозначив $O'J = k$, найдем:

$$y^2 = -4kx.$$

Итак, искомая огибающая — парабола, касательная к $O'L$ в точке O', фокус которой совпадает с точкой J.

Глава III

О БАЗЕ И РУЛЕТТЕ

При кинематическом исследовании кривых очень важное значение имеют мгновенные центры, не только, как дискретные точки, но и как геометрические места.

Геометрическое место мгновенных центров 1 порядка, соответствующих данному перемещению, называют *базой*, а геометрическое место точек подвижной плоскости, при перемещении совпадающих с мгновенными центрами, называют *рулеттой*.

Установим соотношения, выражающие базу и рулетту, соответствующие данному перемещению или перемещению, при котором описаны исследуемые кривые.

Соотношения (6) для $i = 1$ запишутся:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{d\alpha} - \xi_1 \sin\alpha - \eta_1 \cos\alpha &= 0 \\ \frac{db}{d\alpha} + \xi_1 \cos\alpha - \eta_1 \sin\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

откуда, на основании (8), мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{d\alpha} - (y_1 - b) &= 0 \\ \frac{db}{d\alpha} + (x_1 - a) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Исключая a, b, α из (18) и (2), найдем:

$$\varphi(\xi_1, \eta_1) = 0$$

т. е. уравнение рулетты.

Исключив же a, b, α из (19) и (2), найдем:

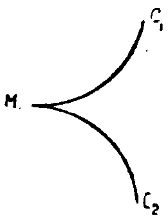
$$\Psi(x_1, y_1) = 0$$

т. е уравнение базы.

Установим ряд свойств базы и рулетты.

Теорема I. Всякое перемещение плоской неизменяемой системы в своей плоскости влечет катание рулетты по базе.

Пусть точка M — м. ц. 1 п. с. д. п. (см. черт. 6); следовательно, неподвижные координаты ее — x_1, y_1, а подвижные — ξ_1, η_1; пусть отрезки базы и рулетты изобразятся:



Черт. 6

$$MC_1 = s_1; \quad MC_2 = s_2.$$

Покажем, что

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{ds_2}{dt}$$

для чего найдем $\frac{dx_1}{d\alpha}, \frac{dy_1}{d\alpha}, \frac{d\xi_1}{d\alpha}, \frac{d\eta_1}{d\alpha}$.

Диф-уя (19), находим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2a}{d\alpha^2} - \left(\frac{dy_1}{d\alpha} - \frac{db}{d\alpha}\right) = 0 \\ &\frac{d^2b}{d\alpha^2} + \left(\frac{dx_1}{d\alpha} - \frac{da}{d\alpha}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Из (8) на основании (6) для $i = 2$ найдем:

$$\frac{d^2a}{d\alpha^2} - (x_2 - a) = 0; \quad \frac{d^2b}{d\alpha^2} - (y_2 - b) = 0 \ldots\ldots (21)$$

Тогда на основании (20) можно написать:

$$\frac{dy_1}{d\alpha} = x_2 - x_1; \frac{dx_1}{d\alpha} = y_1 - y_2 \ldots\ldots \quad (22)$$

Диф-уя (18), найдем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2a}{d\alpha^2} - \frac{d\xi_1}{d\alpha}\sin\alpha - \xi_1\cos\alpha - \frac{d\eta_1}{d\alpha}\cos\alpha + \eta_1\sin\alpha = 0 \\ &\frac{d^2b}{d\alpha^2} + \frac{d\xi_1}{d\alpha}\cos\alpha - \xi_1\sin\alpha - \frac{d\eta_1}{d\alpha}\sin\alpha - \eta_1\cos\alpha = 0 \end{aligned}\right\} . \quad (23)$$

которые на основании (8) [для $i = 2$] запишутся:

$$\left.\begin{aligned} &(\xi_2 - \xi_1)\cos\alpha - (\eta_2 - \eta_1)\sin\alpha - \frac{d\xi_1}{d\alpha}\sin\alpha - \frac{d\eta_1}{d\alpha}\cos\alpha = 0 \\ &(\xi_2 - \xi_1)\sin\alpha + (\eta_2 - \eta_1)\cos\alpha + \frac{d\xi_1}{d\alpha}\cos\alpha - \frac{d\eta_1}{d\alpha}\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} (24)$$

откуда

$$\frac{d\eta_1}{d\alpha}=\xi_2-\xi_1\,;\quad \frac{d\eta_1}{d\alpha}=\eta_1-\eta_2\quad \ldots\ldots \quad (25)$$

поэтому на основании (11)

$$\left(\frac{d\eta_1}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{d\xi_1}{d\alpha}\right)^2=(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)=\left(\frac{dx_1}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{d\alpha}\right)^2$$

т.-е.

$$\sqrt{\left(\frac{ds_1}{d\alpha}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{ds_2}{d\alpha}\right)^2}$$

или

$$\frac{ds_1}{dt}=\frac{ds_2}{dt}$$

Замечание. Нетрудно убедиться в справедливости обратной теоремы.

Теорема II. База и рулетта, соответствующие данному перемещению, имеют общую касательную и нормаль в м. ц. 1 п. с. д. п.

В самом деле, из (22) и (25) следует, что уравнение касательной к рулетте

$$d\eta_1(\eta_1-\eta_2)-d\xi_1(\xi_2-\xi_1)=0\quad \ldots\ldots \quad (26)$$

и уравнение касательной к базе:

$$dy_1(y_1-y_2)-dx_1(x_2-x_1)=0\quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Теорема III. Мгновенные центры 1-го и 2-го пор., соответствующие данному перемещению, лежат на общей нормали к базе и рулетте.

В самом деле, из (28) следует, что:

$$dy_1(y_1-y_2)+dx_1(x_2-x_1)=0.$$

Теорема IV. Пусть ϱ_b — радиус кривизны базы в данной точке, O_1, O_2, O_3 — соответствующие мгновенные центры первых трех порядков, тогда

$$\varrho_b=\frac{O_1O_2^2}{O_2O_3\cos(O_1O_2,\ O_2O_3)}$$

Диф-уя (20),

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^3a}{da^3}+\frac{d^2y_1}{da^2}-\frac{d^2b}{da^2}=0 \\ \frac{d^3b}{da^3}+\frac{d^2x_1}{da^2}-\frac{d^2a}{da^2}=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

но из (6) для $i=3$, найдем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^3a}{da^3}+\xi_3 \sin a+\eta_3 \cos a=0 \\ \frac{d^3b}{da^3}-\xi_3 \cos a+\eta_3 \sin a=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

которые, на основании (8), запишутся:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^3a}{da^3}+(y_3-b)=0 \\ \frac{d^3b}{da^3}-(x_3-a)=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Из (21), (28) и (30) находим:

$$\frac{d^2y_1}{da^2}=y_2-y_3;\ \frac{d^2x_1}{da^2}=x_2-x_3 \quad \ldots\ldots (31)$$

т. к.

$$\varrho_b=\frac{(dx_1^2+dy_1^2)^{3/2}}{d^2y_1dx_1-d^2x_1dy_1}=\frac{\left[\left(\frac{dx_1}{da}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{da}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y_1}{da^2}\cdot\frac{dx_1}{da}-\frac{d^2x_1}{da^2}\cdot\frac{dy_1}{da}};\ldots (32)$$

то на основании (22), (31) и (32) запишется

$$\varrho_b=\frac{\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}^{3/2}}{(y_2-y_3)(y_1-y_2)-(x_2-x_3)(x_2-x_1)}\ldots (33)$$

Т. к.

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\,O_1O_2^2$$

а, с другой стороны,

$$\frac{(y_2-y_3)}{O_2O_3}\cdot\frac{(y_1-y_2)}{O_1O_2}+\frac{(x_2-x_3)}{O_2O_3}\cdot\frac{(x_1-x_2)}{O_1O_2}=\cos(O_2O_3,y)\cos(O_1O_2,y)+$$
$$+\cos(O_2O_3,x)\cos(O_1O_2,x)=\cos(O_2O_3,O_1O_2),$$

поэтому (35) перепишется:

$$\varrho_b = \frac{O_1 O_2^2}{O_2 O_3 \cos(O_1 O_2, O_2 O_3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Теорема V. Пусть ϱ_r — радиус кривизны рулетты в данной точке, а O_1, O_2, O_3 — соответствующие мгновенные центры первых трех порядков, тогда:

$$\varrho_r = \frac{O_1 O_2^2}{O_2 O_3 \cos(O_1 O_2, O_2 O_3) + O_2 O_1}$$

Диф-уя (18), найдем:

$$\frac{d^3 a}{d a_3} - \frac{d^2 \xi^1}{d a^3} \sin a - \frac{d\xi_1}{da} \cos a - \frac{d^2 \eta_1}{d a^2} \cos a + \frac{d\eta_1}{da} \sin a + \frac{d^2 b}{d a^2} = 0$$

$$\frac{d^3 b}{d a^3} + \frac{d^2 \xi_1}{d a_2} \cos a - \frac{d\xi_1}{da} sn\, a - \frac{d^2 \eta_1}{d a^2} \sin a - \frac{d\eta_1}{da} \cos a - \frac{d^2 a}{d a_2} = 0$$

Отсюда, на основании (8) для $i = 2$ и (25), найдем:

$$-\frac{d^2 \xi_1}{d a^2} \sin a - \frac{d^2 \eta_1}{d a^2} \cos a + \sin a (\xi_2 - \xi_3 + \xi_2 - \xi_1) +$$
$$+ \cos a (\eta_2 - \eta_3 + \eta_2 - \eta_1) = 0$$

$$\frac{d^2 \xi_1}{d a_2} \cos a - \frac{d^2 \eta_1}{d a_2} \sin a - \cos a (\xi_2 - \xi_3 + \xi_2 - \xi_1) +$$
$$+ \sin a (\eta_2 - \eta_3 + \eta_2 - \eta_1) = 0$$

так что

$$\frac{d^2 \xi_1}{d a_2} = \xi_2 - \xi_3 + \xi_2 - \xi_1 ; \quad \frac{d^2 \eta_1}{d a_2} = \eta_2 - \eta_3 + \eta_2 - \eta_1 \quad . \quad . \quad (35)$$

Т. к.

$$\varrho_r = \frac{(d\xi_1^2 + d\eta_1^2)^{3/2}}{d^2 \eta_1 d\xi_1 - d^2 \xi^1 d\eta_1}$$

то аналогичными рассуждениями (см. теор. IV) найдем:

$$\varrho_r = \frac{O_1 O_2^2}{O_2 O_3 \cos(O_1 O_2,\ O_2 O_3) + O_2 O_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

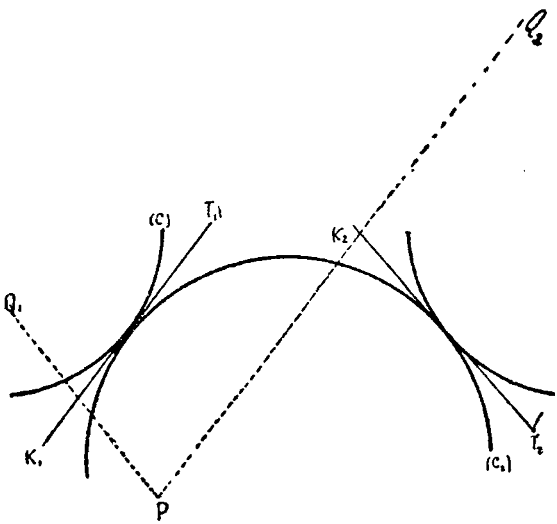
Теорема VI. Пусть ϱ_b — радиус кривизны базы, а ϱ_r — радиус кривизны рулетты, соответствующие данному перемещению, то

$$\frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_r} = \frac{1}{O_1 O_2} = \frac{1}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Замечание. Формула (37) впервые выведена Брессом[1]). Если центры базы и рулетты — по разным сторонам касательной, то имеет место нижний знак.

Теорема VII. Симметричность базы и рулетты по отношению к их общей касательной не нарушится при перемещении плоской неизменяемой системы точек в своей плоскости.

Из симметричности базы и рулетты следует, что координаты их точек, лежащих на перпендикуляре к общей касательной, будучи подставлены в нормальное уравнение этой касательной, дают равные числа. Вследствие неизменности при перемещении уравнений базы и рулетты, результат указанной подстановки не меняется — следовательно, симметричность сохраняется.



Черт. 7

Теорема VIII. Траэктории, описанные различными точками неизменяемой системы, при перемещении в своей плоскости, соответствующие база и рулетта которого — симметричные кривые, подобны подэрам базы, полюс которой симметричен с описывающей точкой по отношению к касательной базе в м. ц. 1 п. с. д. п.

Пусть P — неподвижная точка и Q_1 — подвижная точка — симметричны по отношению к касательной K_1T_1 (см. черт. 7),

Когда рулетта переходит из начального положения C_1 в положение C_2, точка O_1 переходит в O_2, симметричную с P по отношению к K_2T_2; вследствие сохранения симметричности рулетты и базы, сохраняется также симметричность точек, связанных с этими кривыми. Так как геометрическое место K_1

[1]) «Mémoire sur un théorème nouveau — concernant les mouvements plans». Journal de l'école polytechnique. Cahier 35.

оснований перпендикуляров, опущенных из P на касательную к C в соответствующей точке, то K_1 описывает подэру кривой C по отношению к точке P.

Пусть P — начало координат; так как

$$PQ_2 = 2PK_2;\; PQ_1 = 2PK_1$$

то радиусы-векторы кривых, описанных точками K_1 и Q_1, сохраняют постоянное отношение.

Отсюда — кривая, описанная Q_1, подобна подэре кривой (C) по отношению к P.

Т. к. точка Q_1 — произвольная, то обнаруженное свойство Q_1 — общее для всех точек неизменяемой системы, к которой O_1 принадлежит.

Пример I. Найти базу и рулетту, соответствующие Карданову движению, при котором описываются эллипсы.

В этом случае соотношения (2) записываются:

$$b = 0;\; a = c \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

а уравнения (18) имеют вид:

$$\cos \alpha - \xi_1 \sin \alpha - \eta_1 \cos \alpha = 0$$
$$\xi_1 \cos \alpha - \eta_1 \sin \alpha = 0$$

Следовательно, уравнение рулетты

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = C\eta_1;$$

т.-е. рулетта — окружность, центр которой совпадает с серединой стержня AB.

С другой стороны, из (19) и (38) найдем:

$$c \cos \alpha - y_1 = 0;\; x_1 - c \sin \alpha = 0$$

т.-е.

$$x_1^2 + y_1^2 = c^2$$

откуда база — окружность, центр которой совпадает с неподвижным началом.

Пример II. Найдем базу и рулетту, соответствующую конхоидальному движению, рассмотренному в гл. II.

В этом случае нетрудно убедиться, что м. ц. 1 п. с. д. п. будет O_1' (см. черт. 4). Обозначив его координаты через x_0 и y_0, найдем:

$$x_0 = -OK\, tg\, \alpha = -OA\, tg^2 \alpha = -p\, tg^2 \alpha$$
$$y_0 = OK = AB = OA\, tg\, \alpha = p\, tg\, \alpha$$

откуда

$$y_0^2 + px_0 = 0$$

т.-е. базой служит парабола, вершина которой — начало неподвижных координат.

Обозначив координаты O_1' по отношению к подвижным осям через ξ_0 и η_0, найдем;

$$\xi_0 = \frac{p \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}; \quad \eta_0 = \frac{p \cos \alpha}{\cos^2 \alpha};$$

откуда

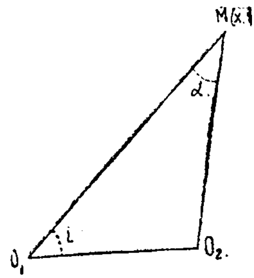
$$(\xi_0^2 + \eta_0^2)\, p^2 = \eta_0^4$$

т.-е. база представляет собою кривую 4-й степени.

Глава IV

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВИЗНЫ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Теорема I. Пусть ϱ — радиус кривизны кривой, описанной при данном перемещении, O_1 и O_2 — м. ц. 1 и 2 п. с. д. п., M — описывающая точка, тогда



Черт. 8

$$\varrho = \frac{MO_1}{MO_2 \cos(MO_2,\ MO_2)}$$

В самом деле

$$\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{d^2y\,dx - d^2x\,dy}$$

Из (12) для $i = 1,2$; следует

$$\frac{dx}{d\alpha} = y_1 - y\,;\ \frac{d_2x}{d\alpha^2} = x_2 - x\,;\ \frac{dy}{d\alpha} = x - x_1\,;\ \frac{d^2y}{d\alpha^2} = y_2 - y\,;$$

Откуда:

$$\varrho = \frac{[(x_1 - x)^2 + (y - y)^2]^{3/2}}{(y_2 - y)(y_1 - y) + (x_2 - x)(x_1 - x)}\,;$$

но

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = MO^2{}_1\,;$$

и

$$\frac{y_2 - y}{MO_2} \cdot \frac{y_1 - y}{MO_2} + \frac{x_2 - x}{MO_1} \cdot \frac{x_1 - x}{MO_1} = \cos(MO_2, y)\cos(MO_1, y) +$$

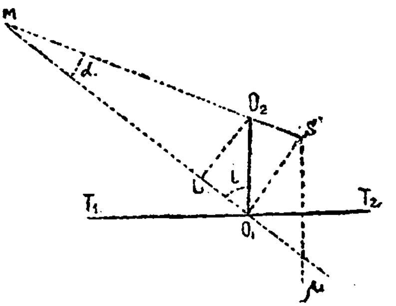
$$+ \cos(MO_2, x)\cos(MO_1, x) = \cos(MO_1, MO_2)\,;$$

следовательно,

$$\varrho = \frac{MO_1{}^3}{MO_1\,.\,MO_2\cos(MO_1,\ MO_2)} = \frac{MO_1{}^2}{MO_2\cos\alpha}\ \ .\ \ .\ \ .\ (39)$$

Эта формула, впервые указанная Трансоном[1]),—частный случай формулы Савари[2]).

Теорема II. Центр кривизны кривой — одна из вершин треугольника, вторая вершина которого — описывающая точка, а третья S — точка пересечения прямой, совпадающей по направлению с MO_2 с перпендикуляром к $M\mu$ в O_1, лежащая вместе с μ на перпендикуляре к общей касательной T_1T_2 к базе и рулетте, соответствующие данному перемещению (см. черт. 9).



Черт. 9

Построив $O_1O_2 \perp T_1T_2$ (см. 0-ю стр. теор. III) и $O_2L \perp MO_1$ мы из треугольников μMS и O_1MO_2 находим:

$$\frac{M\mu}{MO_1} = \frac{MS}{MO_2}$$

а из треугольников O_1MS и LMO_2

$$\frac{MS}{MO_2} = \frac{MO_1}{ML}$$

так что

$$\frac{M\mu}{MO_1} = \frac{MO_1}{ML} = \frac{MO_1}{MO_2 \cos\alpha}$$

Следовательно, на основании (39),

$$M\mu = \varrho.$$

Следствие. Описывающая точка, центр кривизны и м. ц. 1 п. с. д. п. лежат на одной прямой.

Замечание 1. Метод, указываемый предыдущей теоремой, не достигает своей цели, когда описывающая точка попадает на общую нормаль к базе и рулетте.

Метод этот также не дает возможности построить центр кривизны, когда заданы центры кривизны, базы и рулетты. Для

---

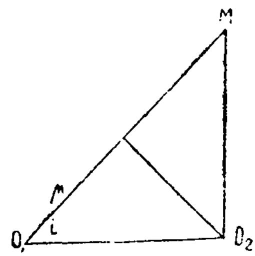
[1]) «Méthode géométrique pour les rayons de courbure d'une certain classe de courbes». A. Transon. Journal de Mathématiques. T. X, p. 155.

[2]) В. Лигин. «Геометрическое исследование абсолютного движения неизменяемой системы». Одесса, 1872, стр. 186.

этого случая удобнее пользоваться методом Koenigs'a, устанавливаемым следующими предложениями.

Теорема III. Пусть O_1 и O_2 — м. ц. 1 и 2 п. с. д. п., M — описыв. точка, $\varrho = M\mu$, $O_1 O_2 = k$, $\angle i = \angle MO_1 O_2$; $\mu O_1 = r_1$; $\varrho' = MO_1$; тогда (см. черт. 10)

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{k \cos i} \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$$



Черт. 10

Из (41) [см. чертеж 11] следует:

$$\varrho = \frac{MO_1^2}{OM_2 \cos \alpha} = \frac{MO_1^2}{ML} = \frac{\varrho'^2}{\varrho' - k \cos i};$$

т.-е.

$$\varrho' - r = \frac{\varrho'^2}{\varrho' - k \cos i};$$

или

$$rk \cos i - \varrho' k \cos i - \varrho' r = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

т.-е.

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{k \cos i}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

Замечание 2. Нетрудно убедиться, что при указанном выборе осей точка, координаты которой $x = 0, y = -k$, м. ц. 2 п. с. д. п.

В самом деле, точка эта удовлетворяет соотношению:

$$(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)^2 = k^2,$$

так как

$$x_1 = y_1 = 0,$$

где (x_2, y_2) представляет собою м. ц. 2 п. с. д. п.

Теорема IV. При обозначениях предыдущей теоремы справедливо соотношение:

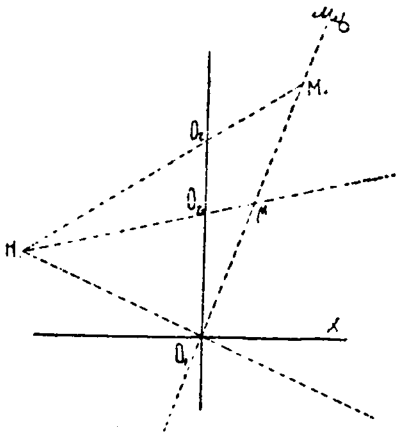
$$\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{r}\right) \cos i = \frac{1}{\varrho_b} - \frac{1}{\varrho_r} = \frac{1}{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

где ϱ_b — радиус кривизны базы, а ϱ_r — радиус кривизны рулетты.

Теорема эта непосредственно следует из (37) и (40).

Замечание 3. Формула (43), обычно связываемая с именем Savary, по мнению Koenigs'a, должна быть приписана Euler'у [1]).

Теорема V. Пусть неподвижными осями координат будут касательная и нормаль к базе и рулетте, соответствующие перемещению, при котором описана кривая, радиус кривизны которой ищется. Пусть подвижные оси координат прямые $O^1\xi$ и $O_1\eta_1$ где $O_1\xi \perp O_1\eta$, причем $O_1\xi$ проходит через описывающую точку, то, при сохранении обозначений предыдущей теоремы, отрезки u и u_2, образованные MO и μO^b на подвижных осях, равны (см. черт. 11). В самом деле, уравнения MO, и O_b по отношению к $O_1\xi$ и $O_1\eta$



Черт. 11

$$\frac{x}{r}+\frac{y}{u_1}=1;\ \frac{x}{\varrho}+\frac{y}{u_2}=1;\quad (44)$$

где r, ϱ, u_1, u_2 — отрезки, образованные прямыми MO_r у μO_b на осях $O_1\xi$ и $O_1\eta$.

Т. к. координаты O_b и O_r — $\varrho_r\cos i$, $\varrho_r\sin i$, $\varrho_b\cos i$, $\varrho_b\sin i$, то (44) перепишутся:

$$\frac{\cos i}{r}+\frac{\sin i}{u_1}=\frac{1}{\varrho_r};\quad \frac{\cos i}{\varrho_1}+\frac{\sin i}{u_2}=\frac{1}{\varrho_b};$$

откуда, на основании (43):

$$\left(\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{r}\right)\cos i+\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_1}\right)\sin i=\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_r}=\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right)\cos i$$

следовательно,

$$u_1=u_2.$$

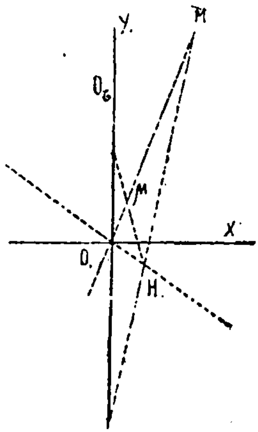
Следствие. Чтобы построить центр кривизны μ, соединяют данную точку M с O_1 — м. ц. 1 п. с. д. п. и с O_r —

---

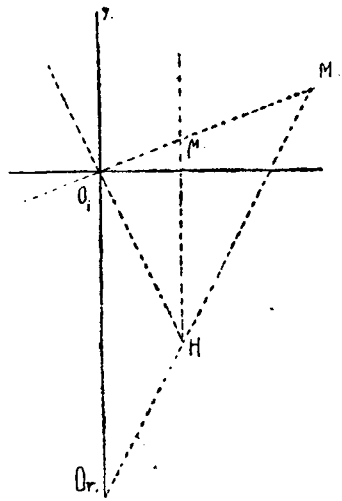
[1]) См. Note IV: «Sur le probléme de courbure dans le mouvement plan d'une figure plane». 9. Koenigs. Lecous de cinémahque.

центром кривизны рулетты, потом H, точку пересечения MO с перпендикуляром к O_1M, соединяют с O_b. Точка пересечения HO_b и O_1M — искомый центр кривизны (см. чертежи 12, 13, 14).

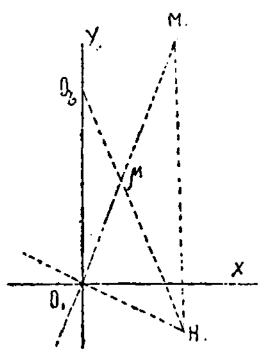
Замечание 4. Черт. 12 указывает построение центра кривизны, когда O_b и O_r по разным сторонам общей касательной



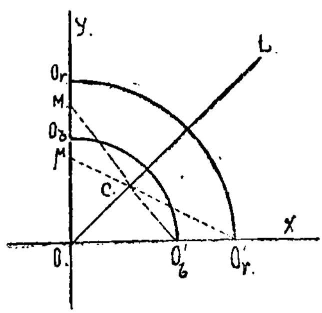
Черт. 12



Черт. 14



Черт. 13



Черт. 15

к базе и рулетте, а черт. 13 и 14 — когда O_r и O_b — бесконечно-удаленные точки. В первом случае MO_r, а во втором HO_b — параллельны общей нормали.

Замечание 5. Для случая, когда описывающая точка попадает на общую нормаль к базе и рулетте, когда вследствие совпадения HO_b и MO_1 положение точки μ — неопределенное

Koenigs дает особый метод, который он изложил в Note VI: «Sur les problèmes des centres de courbure dans les mouvement plan d'une figure plane». Тогда $r = O$, т.-е. $\cos i = 1$ и (43) запишется:

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho_b} - \frac{1}{\varrho_r} = \frac{1}{k} \quad \dots\dots\dots (45)$$

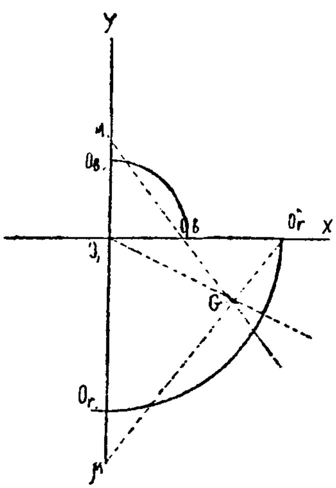
В этом случае откладывают на общей касательной отрезки O_1O_r' и O_1O_b' (см. черт. 15), соответственно равные O_1O_r и O_1O_b. Тогда из уравнений MO_b' и $\mu O'$

$$\frac{x}{\varrho_b} + \frac{y}{r} - 1 = 0; \quad \frac{x}{\varrho_r} + \frac{y}{\varrho'} - 1 = 0$$

или [на основании (45)]

$$\left(\frac{x}{\varrho_b} + \frac{y}{r} - 1\right) - \left(\frac{x}{\varrho_r} + \frac{y}{\varrho'} - 1\right) = \left(\frac{1}{\varrho_b} - \frac{1}{\varrho_r}\right)(x - y) = 0$$

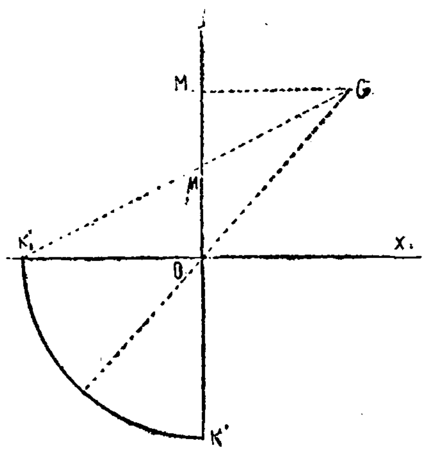
где правая часть выражает уравнение OL биссектрисы угла O_rOO_r', следует, что MO_b' и $\mu O_2'$, пересекаются на OL. Поэтому, чтобы построить центр кривизны траэкторий в точках, принадлежащих общей нормали, нужно G — точку пересечения MO_b' с биссектрисой угла O_rOO_r' соединить с O_r'. Точка пересечения $O_r'G$ с общей нормалью и есть искомый центр кривизны.



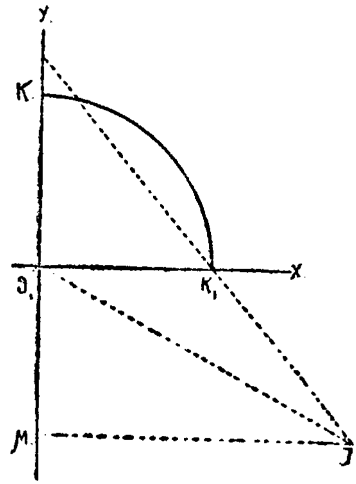
Черт. 16

Черт. 16 относится к случаю, когда O_b и O_r — по разным сторонам от касательной к базе и рулетте. Если $\frac{1}{\varrho} = 0$, то из (43) $\varrho_r = -k$, т.-е. O_r совпадает с K' — м. ц. 2 п. с. д. п. (см. замеч. 2); тогда вращают ϱ_r до совпадения K' с K_1' (черт. 17). Из M проводим прямую, параллельную O_1x, до пересечения в G с биссектрисой угла $K'OK_1'$, а G соединяем с K_1' линией GK_1', пересекающей O_1y в точке μ.

Подобным образом строят μ, когда $\frac{1}{\varrho_r} = 0$, т.-е. O_b совпадает с K (черт. 18).



Черт. 17



Черт. 18

Установим метод построения центра кривизны, применимый во всех указанных случаях. Метод этот вытекает из следующих теорем:

Теорема VI. Пусть M — данная точка, μ — соответствующий центр кривизны ее траэктории, J — точка, для которой $\varrho' = \varrho = \infty$, O_1 — м. ц. 1 п. с. д. п. Тогда

$$M\mu \,.\, MJ = MO_1^2 \qquad (46)$$

Пусть J — некоторая точка, описывающая при данном перемещении прямую линию. Для этой точки $\varrho' = \infty$ и (43) для нее запишется

$$-\frac{1}{r_\infty} = \frac{1}{k \cos i} \qquad (47)$$

Тогда из (43) и (47) следует (см. черт. 19):

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_\infty} = \frac{r_\infty - r}{r r_\infty}$$

и $$r_\infty = -k\cos i = -\frac{r\varrho'}{r-\varrho'} = \frac{r\varrho'}{\varrho'-r}$$

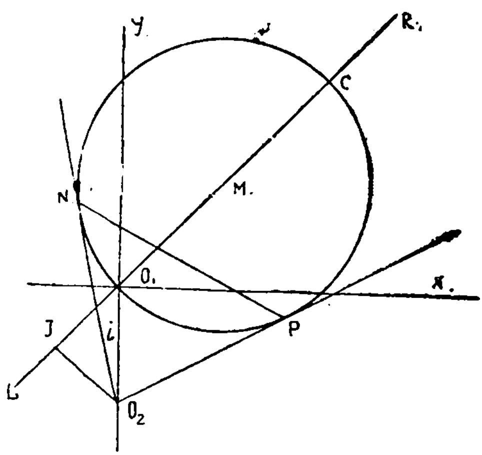
откуда $$(\varrho'-r)(r_\infty - r) = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

причем $\varrho' = O_1\mu$, $r = O_1M$, $r_\infty = O_1J$, где J, как видно из (47), лежит по левой стороне O_1 (см. черт. 19).

Отсюда:

$$(O_1\mu - O_1M)(O_1J - O_1M) = M\mu \,.\, MJ = MO_1^2.$$

Теорема VII. При обозначениях предыдущей теоремы центр кривизны траэктории M — точка пересечения поляры O_2



Черт. 19

по отношению к окружности радиуса O_1M и диаметра этой окружности, проходящей через M.

В самом деле, на основании (46):

$$\frac{MO_1^2}{M\mu} = \frac{O_1M \,.\, MO_1}{\mu M} = \frac{(\mu M + MO_1)(\mu M + O_1M) - \mu M^2}{\mu M} = MJ$$

откуда $mk \,.\, O_1M = MC$

$$\frac{\mu O_1(\mu M + MC) - M\mu^2}{\mu M} = \frac{2\mu O \,.\, \mu C}{\mu M + O_1M + \mu O_1} + M\mu = M\mu + \mu J$$

или $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu O_1} + \frac{1}{\mu C}\right) = \frac{1}{\mu J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

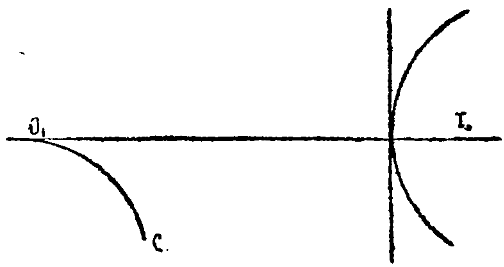
де J, на основании (47),— точка пересечения взаимно перпендикулярных прямых O_1M и O_2J.

Отсюда O_2J — поляра точки μ по отношению к окружности радиуса O_1M, т.-е. μ лежит на соответствующей поляре точки O_2. С другой стороны, μ лежит на прямой MC, следовательно, μ — точка пересечения MC с полярной точки O_2 по отношению к окружности радиуса MO_1.

Следствие. Чтобы построить центр кривизны траэктории M в соответствующей точке, проводят из O_2 две касательные к окружности радиуса O_1M; точка пересечения хорды касания с диаметром MC — искомый центр кривизны.

Установим метод построения центра кривизны развертки в одном частном случае. Метод построения центра кривизны для общего случая установлен Bour'ом[1]).

Теорема VIII. Кривые, описанные при плоском перемещении, соответствующая база и рулетта которого—некоторая кривая C и касательная к ней — эвольвенты базы.



Черт. 20

В самом деле все точки касательной опишут кривые, нормали к которым во всякой точке кривой — прямая O_1T (см. черт. 20), где O_1 — м. ц. 1 п. с. д. п. и кривую C можно рассмотреть, как огибающую нормалей во всякой точке кривой, описанной какой-нибудь точкой O_1T, т.-е. C — эволюта кривой, описанной какой-нибудь точкой касательной.

Следствие. Центр кривизны развертки кривой, описанной какой-нибудь точкой рулетты при перемещении, в котором база — некоторая кривая, а рулетта — касательная к ней, совпадает с центром кривизны базы. Установим построение центра кривизны огибающей.

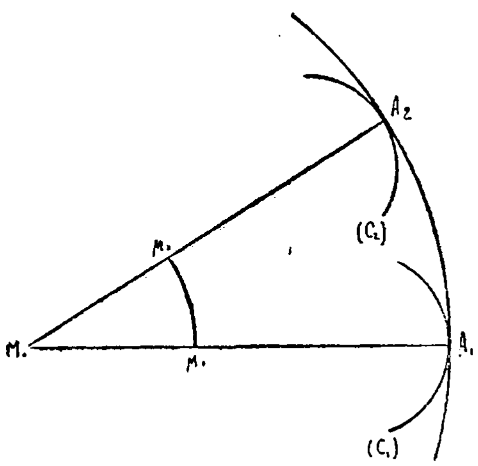
Теорема IX. Центр кривизны E, огибающей последовательные положения кривой C, неизменно связанной с плоской неизменяемой фигурой, перемещающейся в своей плоскости,

---

[1]) «Геометрическое исследование абсолютного движения неизменяемой системы». В. Лигин.

совпадает с центром кривизны траэктории точки μ, где μ — центр кривизны C в соответствующей точке.

Пусть C_1 — данное положение кривой C (см. черт. 21). Центр кривизны кривой C_1 лежит на MA_1 нормали к этой кривой, совпадающей с нормалью к огибающей E в точке их соприкосновения (теор. II, гл. II). При бесконечно-малом перемещении кривая C_1 переходит в C_2, MA_1 в MA_2, а μ_1 в μ_2; поэтому M — центр кривизны огибающей в соответствующей точке. С другой стороны, M — точка пересечения нормалей к траэктории μ в сколь угодно близких друг к другу точках μ_1 и μ_2; следовательно, M — центр кривизны траэктории центра кривизны кривой C_1.



Черт. 21

В виду важности мгновенного центра 2 порядка для построения центра кривизны, установим метод его построения.

Лемма. Пусть x и y — координаты данной точки M, а ξ и η — координаты соответствующего центра кривизны ее траэктории;

тогда $$\xi=\frac{kxy}{x^2+y^2+ky}; \qquad \eta=\frac{ky^2}{x^2+y^2+ky}; \quad . \ . \ . \ (50)$$

В самом деле (см. черт. 19)

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=\frac{\varrho'}{r} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (51)$$

С другой стороны,

$$x=r\cos i; \quad y=r\sin i \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (52)$$

Из (43), (51) и (52):

$$\xi=\frac{x\varrho'}{r}=\frac{kxr\cos i}{r^2+kr\cos i}=\frac{kxy}{x^2+y^2+ky};$$

$$\eta=\frac{y\varrho'}{r}=\frac{kyr\cos i}{r^2+kr\cos i}=\frac{ky^2}{x^2+y^2+ky}.$$

Теорема X. М. ц. 2 п. с. д. п.— точка пересечения радикальной оси окружностей радиуса MO_1 и диаметра $M\mu$ с общей нормалью рулетты и базы в точке O_1.

В самом деле, уравнения окружности радиуса MO_1:

$$(X-x)^2+(Y-y)^2=r^2;$$

или

$$X^2+Y^2-2Xx-2Yy=0 \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

а уравнение окружности диаметра $M\mu$:

$$\left(X-\frac{x+\xi}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{y+\eta}{2}\right)=\frac{(x-\xi)^2}{4}+\frac{(y-\eta^2)}{4},$$

или

$$X^2+Y^2-(\xi+x)X-(\eta+y)Y+\xi x+\eta y=0 \quad .\ . \quad (54)$$

Подставив в (53) и (54) $X=0$, $Y=-k$ и выражения ξ и η из (50), получим значения их левых частей

$$k^2+2ky.$$

Отсюда, результат подстановки координат точки O_2 в нормальное уравнение окружностей радиуса O_1M и диаметра $M\mu$ один и тот же, т.-е. O_2 обладает одинаковой мощностью по отношению к обеим окружностям или O_2 принадлежит к геометрическому месту точек одинаковой мощности по отношению к этим кривым, т.-е. лежит на их радикальной оси. С другой стороны, O_2 лежит на общей нормали к базе и рулетте; следовательно, точка пересечения этой нормали и радикальной оси указанных окружностей — м. ц. 2 п. с. д. п.

Пример I. Построить центр кривизны эллипса.

Определив O_r и O_b, соответствующие перемещению, при котором описан эллипс, мы методом Koenigs'а строим μ (см. черт. 22).

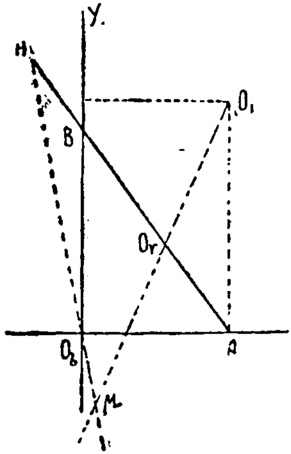
Пример II. Построить центр кривизны к конхоидам. Для этого найдем O_2. Точка эта (см. теор. VII, гл. V) диаметрально противоположна O_1 — м. ц. 1 п. с. д. п. (см. черт. 23); поэтому

$$\angle BO_2O'+\angle BO_1O'=2d,$$

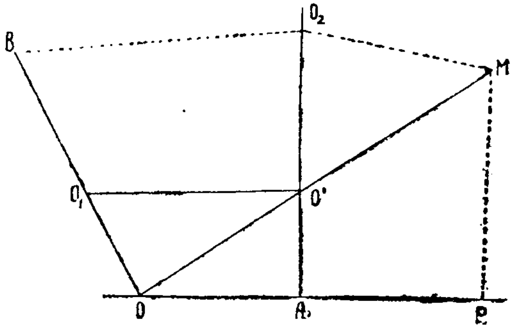
т.-е. O_2 — точка пересечения $O_2B \perp OB$ и прямой AD. Зная положение O_1 и O_2, можно построить центр кривизны методом, указанным теор. II или методом Koenigs'а.

Пример III. Построить центры кривизны подэр, рассмотренных в теор. VII (стр. 24).

Т. к. O_r и O_b — симметричны по отношению к общей касательной, как лежащие на перпендикуляре к этой каса-



Черт. 22



Черт. 26

тельной при любом положении неизменяемой системы, то из (37)

$$\frac{1}{\varrho_b}+\frac{1}{\varrho_r}=\frac{2}{\varrho_r}=\frac{1}{k},$$

т. - е.

$$K=\frac{\varrho_r}{2}.$$

Таким образом, положение O_2 определено, а потому центр кривизны можем определить известными методами.

Глава V

О ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ОКРУЖНОСТЯХ И ОСОБЫХ ТОЧКАХ

Пусть положительное направление общей нормали базы и рулетты, соответствующее данному перемещению, будет осью ординат, а положительное направление их общей касательной — осью абсцисс. За начало координат примем м. ц. 1 п. с. д. п., т. е. точку ($x=0$, $y=0$; $\xi=0$, $\eta=0$), обозначив через x и y координаты данной точки, а через ξ и η — координаты центра кривизны траэктории, описанной данной точкой; расстояние между O_1 и O_2 — м. ц. 1 и 2 п. с. д. п. — обозначим через k.

Тогда справедливы следующие предложения:

Теорема I. Для того, чтобы точка при данном перемещении плоской неизменяемой системы в своей плоскости описала прямолинейный элемент, необходимо и достаточно, чтобы точка эта принадлежала окружности $x^2+y^2+ky=0$, из которой исключена точка ($x=0$, $y=0$).

Как известно:

$$\xi=\frac{kxy}{x^2+y^2+ky};\quad \eta=\frac{ky^2}{x^2+y^2+ky}; \quad \ldots \quad (55)$$

откуда

$$\delta\xi=kxy;\ \delta\eta=ky^2;\ \delta\zeta=x^2+y^2+kyz \quad \ldots \quad (56)$$

где x, y, z и ξ, η, ζ — трилинейные координаты описывающей точки и центра кривизны.

Из (56) следует, что, если $\zeta=0$, то и $x^2+y^2+kyz=0$ и обратно.

С другой стороны, если $x=0$ и $y=0$, то $\xi=\eta=0$, а этим координатам не соответствует никакая точка плоскости.

Отсюда, между точками бесконечно-удаленной прямой $\zeta=0$ и окружности $x^2+y^2+ky=0$, из которой исключена точка ($x=0$, $y=0$), существует взаимно-однозначное соответствие.

Замечание 1. Если $k=0$, то $x^2+y^2=0$, т.-е. окружность $x^2+y^2+ky=0$ обращается в точку ($x=0$, $y=0$) или в систему циклических точек; поэтому случай $k=0$ исключается из рассмотрения.

Также исключается из рассмотрения случай $k=\infty$; тогда все точки описанных кривых представляют собою точки возврата.

Теорема II. Для того, чтобы точка при данном перемещении плоской неизменяемой системы представляла собою центр кривизны траэктории, описанной бесконечно-удаленной точкой, необходимо и достаточно, чтобы эта точка принадлежала окружности $\xi^2+\eta^2-ky=0$, из которой исключена точка ($\xi=o$, $\eta=0$).

Из (55) следует:

$$x=-\frac{k\xi\eta}{\xi^2+\eta^2-k\eta};\quad y=-\frac{k\eta^2}{\xi^2+\eta^2+k\eta};\quad . . . (57)$$

откуда:

$$\delta x=-k\xi\eta;\ \delta y=-k\eta^2;\ \delta z=\xi^2+\eta^2-k\eta\zeta\quad . . (58)$$

Нетрудно убедиться, что между прямой $z=0$ и окружностью $\xi^2+\eta^2-k\eta=0$, из которой исключена точка ($\xi=0$, $\eta=0$), установлено взаимно-однозначное соответствие.

Замечание 2. Случай $k=0$ и $k=\infty$ исключаем из рассмотрения по соображениям, приведенным в замечании 1.

Замечание 3. Окружность $\xi^2+\eta^2-k\eta=0$ называют окружностью центров, а окружность $x^2+y^2+k\eta=0$ — окружностью изгибов[1]). Окружности эти называются также 1-ой и 2-ой окружностью Mannheim'a[2]). Установим связь между окружностями Mannheim'a и траэкториями, описанными M и μ в одном частном случае.

Теорема III. Если данная точка M при перемещении в плоскости описывает прямую, то соответствующий центр кривизны описывает коническое сечение Rivals'a, т.-е. коническое

---

[1]) «Recherches sur les propriétés géométriques des mouvements' plans». Gilbert. Mémoires courounées de l'academie Belgique. T. XXX an 1857.

[2]) Géométrie cinématique plane. L. Crelier. Bienne, 1915, p. 30.

сечение, касающееся окружности центров во мгновенном центре 1-го порядка и обратно.

В самом деле, пусть M описывает прямую (в однородных координатах)

$$ux+vy+wz=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (59)$$

На основании (57)

$$\frac{x}{z}=-\frac{k\eta}{\xi^2+\eta^2-k\eta\zeta}, \quad \frac{y}{z}=-\frac{k\eta^2}{\xi^2+\eta^2-k\eta\zeta},$$

т.-е.

$$\delta x=k\xi\eta;\; \delta y=k\eta^2;\; \delta z=-(\xi^2+\eta^2-k\eta\zeta); \quad . \; . \; (60)$$

откуда из (59)

$$uk\xi\eta+vk\eta^2-w(\xi^2+\eta^2-k\eta\zeta)=0$$

Аналогично доказывается обратная теорема.

Теорема IV. Если центр кривизны μ, перемещаясь в плоскости, описывает прямую, то соответствующая ему точка M описывает коническое сечение, соприкасающееся с окружностью изгибов в мгновенном центре 1 порядка.

В самóм деле, пусть точка μ описывает прямую:

$$u\xi+v\eta-w\zeta=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (61)$$

На основании (55)

$$\frac{\xi}{\zeta}=\frac{kxy}{x^2+y^2+kyz}; \quad \frac{\eta}{\zeta}=\frac{ky^2}{x^2+y^2+kyz};$$

$$\delta\xi=kxy;\; \delta\eta=ky^2;\; \delta\varsigma=x^2+y^2+kyz \quad . \; . \; . \; . \; (62)$$

Тогда из (61) следует

$$\text{и} \;\; kxy+vky^2-\omega(x^2+y^2+kyz)=0;$$

Аналогично доказывается обратная теорема.

Установим некоторые приложения теорем Mannheim'а.

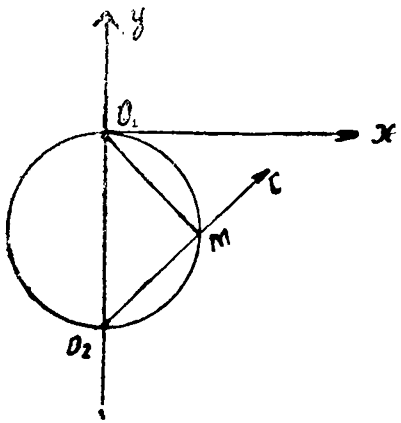
Теорема V. Направление прямолинейных элементов, описанных точками плоской неизменяемой системы, при данном ее перемещении в своей плоскости, проходит через м. ц. 2 п. с. д. п. (см. черт. 24).

Пусть траэкторией данной точки будет MC, тогда $MO_1 \perp MC$, где O_1 — м. ц. 1 п. с. д. п.

С другой стороны, на основании теоремы I, M принадлежит окружности изгибов, т.-е. MO_1O_2 — прямой угол, или

$MO_2 \perp MO_1$, следовательно, направление MC совпадает с прямой MO_2, где O_2 — м. ц. 2 п. с. д. п., т. к. ее координаты: $x = 0$, $y = -k$.

Теорема VI. Окружность центров — геометрическое место центров кривизны, огибающих последовательные положения прямых, неизменно связанных с плоской неизменяемой системой при данном ее перемещении в своей плоскости.



Черт. 24

По теореме IX-ой гл. IV, центр кривизны любой из этих огибающих в данной точке совпадает с центром кривизны траэктории центра кривизны, огибаемой в этой же точке.

Т. к. огибаемая — прямая линия, то ее центр кривизны есть бесконечно удаленная точка; поэтому центр кривизны огибающей в данной точке, на основании II-ой теоремы, лежит на окружности центров.

Установим ряд предложений о построении окружности изгибов и центров, имеющих очень важное значение для кинематического исследования плоских кривых.

Теорема VII. Окружность, проходящая через м. ц. 1 п. с. д. п. и м. ц. 2 п. с. д. п., — окружность изгибов.

Предложение это следует из уравнения окружности:

$$x^2 + y^2 + ky = 0,$$

где

$$k = O_1O_2.$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующ. двух теорем.

Теорема VIII. Окружность, проходящая через три точки, описывающие при данном перемещении прямолинейные элементы, — окружность изгибов.

Теорема IX. Окружность, проходящая через м. ц. 1 п. с. д. п. или м. ц. 2 п. с. д. п., — и две точки, описывающие при данном перемещении прямолинейные элементы, — окружность изгибов.

Теорема X. Окружность, проходящая через м. ц. 1 п. с. д. п. или м. ц. 2 п. с. д. п., и центры кривизны траэктории двух точек, описанных при данном перемещении плоской неизменяемой системы точек в своей плоскости,— окружность изгибов.

В самом деле, на основании (46),

$$M\mu \,.\, MJ = MO_1^2;$$

мы при помощи двух значений μ определяем две точки, описывающие при данном перемещении прямолинейные элементы.

Теорема XI. Окружность, диаметр которой

$$D = \frac{\varrho_b \varrho_r}{\varrho_b \pm \varrho_r}$$

где ϱ_b, ϱ_r — радиусы кривизны базы и рулетты, соответствующие данному перемещению и проходящие через м. ц. 1 п. с. д. п. или м. ц. 2 п. с. д. п., есть окружность изгибов.

В самом деле, из (37)

$$\frac{1}{\varrho_b} \pm \frac{1}{\varrho_r} = \frac{1}{O_1O_2}.$$

Теорема XII. Окружность, симметричная с окружностью изгибов по отношению к общей касательной базы и рулетты, соответствующих данному перемещению, есть окружность центров.

Теорема эта непосредственно следует из уравнений этих окружностей.

Теорема XIII. Траэктория в данной точке обращена своей выпуклостью к м. ц. 1 п. с. д. п., если точка эта внутри окружности изгибов.

Теорема XIV. Траэктория в данной точке обращена своей выгнутостью к м. ц. 1 п. с. д. п., если точка эта вне окружности изгибов.

Предложения эти вытекают из соотношения (46):

$$M\mu \,.\, MJ = MO_1.$$

Теорема XV. Точки, совпадающие с м. ц. 1 п. с. д. п., представляют собою точку возврата 1-го вида траэкторий, описанных ими при данном перемещении.

Теорема XVI. Если O_1 — м. ц. 1 п. с. д. п., а O_2 — м. ц. 2 п. с. д. п. и

$$\frac{1}{O_1O_2} = 0$$

то траэктории всех точек, описанных при данном перемещении, имеют точки возврата первого вида, а траэктории точек касательной к базе и рулетте имеют точки возврата 2-го вида.

Последние два предложения вытекают из следующих соображений. Траэктория, описанная при данном перемещении, имеет точку возврата, если описанный элемент кривой равен нулю, т.-е.

$$MO_1\,d\alpha = 0$$

где M — описывающая точки, O_1 — м. ц. 1 п. с. д. п., α — угол, образованный подвижной и неподвижной осью абсцисс, ибо всякое перемещение эквивалентно вращению около м. ц. 1 п. с. д. п., откуда

$$MO_1\frac{d\alpha}{ds_1} = 0, \text{ т.-е. } MO_1 : \frac{ds_1}{d\alpha} = 0$$

где ds_1 — элемент базы, что возможно, если

$$MO_1 = 0 \text{ и } \frac{1}{O_1O_2} \text{ — конечно}$$

или

$$\frac{d\alpha}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}} = \frac{1}{O_1O_2} = 0$$

В первом случае из (41)

$$rk\cos i - \varrho' k\cos i - \varrho' r = 0$$

или

$$\mu O_1 . O_1O_2\cos i - MO_1 . O_1O_2\cos i - MO_1 . O_1\mu = 0 \quad . \quad . \; (63)$$

т.-е.

$$\mu O_1 = 0$$

Следовательно

$$MO_1 + O_1\mu = M\mu = 0,$$

т.-е. соответствующая точка — точка возврата 1-го вида.

Во втором случае, из (63) следует:

$$\frac{1}{MO_1} - \frac{1}{\mu O_1} = \frac{1}{O_1O_2\cos i}$$

Случай этот заключает в себе два подслучая:

$$\cos i = 0\,; \qquad \cos i \neq 0\,;$$

или

$$i = 90\,; \qquad i \neq 90\,;$$

Пусть $i \neq 90$, тогда

$$\frac{1}{MO_1} = \frac{1}{\mu O_1}\,;$$

т.-е.

$$MO_1 + O_1\mu = 0 \text{ или } M\mu = 0$$

т.-е. соответствующая точка — точка возврата 1-го вида. Пусть $i = 90$, т.-е. описывающие точки принадлежат касательной к базе и рулетте.

Тогда, выразив радиус кривизны:

$$M\mu^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\,,$$

что, на основании (55), дает:

$$M\mu^2 = \left[\frac{Kxy}{x^2+y^2+ky} - x\right]^2 + \left[\frac{Ky^2}{x^2+y^2+ky} - y\right] =$$

$$= \frac{(-x^3 - xy^2)^2 + (-x^2y - y^3)}{(x^2 + y^2 + ky)^2}$$

т.-е.

$$M\mu^2 = \frac{(x^2+y^2)^3}{(x^2+y^2+ky)^2}$$

т.-е.

$$M\mu = \frac{x^3}{x^2+ky}\,,$$

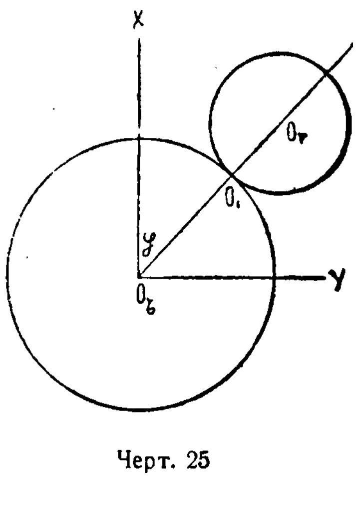
так как ордината точек касательной при выборе осей, соответствовавшем выводу (55), равна нулю. Следовательно, радиус кривизны конечен и зависит от x—координаты точки, траэктория которой исследуется. Отсюда, траэктории точек общей касательной базы и рулетты в соответствующих точках имеют точки возврата второго вида, исключая точки ($x = 0$, $y = 0$), траэктория которой имеет точку возврата первого вида.

Глава VI

ПРИЛОЖЕНИЯ

Исследование свойств эпициклоид, циклоид, конхоиды, подэры, эллипса и др.

Как известно, если база и рулетта — окружности, то кривые, описанные при данном перемещении, называются эпициклоидами или гипоциклоидами, смотря по тому, катится ли рулетта по выпуклой или вогнутой стороне базы.



Черт. 25

Вводя:

$$R+r=ar \quad . \quad . \quad . \ (64)$$

эпициклоида запишется:

$$\left.\begin{aligned} x &= ar\cos\varphi - \varrho\cos a\varphi \\ y &= ar\sin\varphi - \varrho\sin a\varphi \end{aligned}\right\}. \quad (65)$$

где R — радиус базы, r — радиус рулетты, ϱ — MO_r, причем M — данная точка, O_b — центр базы, O_1 — м. ц. 1 п. с. д. п., O_r — центр рулетты, а $\varphi = .\angle xO_1O_r$ (см. черт. 25). Если $\varrho = r$, то (65) выражает обыкновенную эпициклоиду; если $\varrho \gtrless r$, — то удлиненную или сокращенную эпициклоиду.

Установим некоторые свойства эпициклоид.

Теорема I. Развертка обыкновенной эпициклоиды — тоже обыкновенная эпициклоида.

Применяя метод Koenigs'а, получим центр кривизны μ, как точку пересечения HO^b и MO_1 (см. черт. 26).

Тогда из подобия треугольников HO_bK и μO_bO_1 следует:

$$\frac{O_b\mu}{O_b.H}=\frac{O_b.O_1}{O_bK}=\frac{R}{R+2r}=const\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(66)$$

откуда траэктория центра кривизны μ, т.-е. развертка эпициклоиды, подобна кривой, описанной точкой H, т.-е. представляет собою обыкновенную эпициклоиду.

Теорема II. При установленных обозначениях

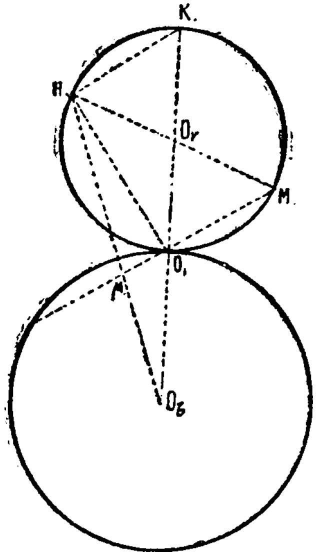
$$\frac{M\mu}{MO_1}=\frac{2(R+r)}{R+2r}\;.\;.\;.\;.\quad(67)$$

В самом деле, из треугольников HBK и μO_bO_1 следует:

$$\frac{O_1\mu}{HK}=\frac{O_1\mu}{MO_1}=\frac{O_bO_1}{O_bK}=\frac{R}{R+2r},$$

откуда

$$\frac{MO_1+O_1\mu}{MO_1}=\frac{M\mu}{MO_1}=\frac{2(R+r)}{R+2r}.$$



Черт. 26

Теорема III. Если

$$R=-2r,$$

то эпициклоида вырождается в прямую.

В самом деле, тогда из (67)

$$\frac{MO_1}{M\mu}=\frac{2(R+r)}{R+2r}=0$$

т.-е.

$$\frac{1}{M\mu}=0.$$

Теорема IV. Радиус кривизны кардиоиды удовлетворяет соотношению

$$M\mu={}^4/_3\,MO_1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(68)$$

Положив $\varrho = R = r$, (65) выражает кардиоиду, для которой, при $R = r$, (67) приводится к (68).

Теорема V. Развертка обыкновенной циклоиды — тоже обыкновенная циклоида.

Теорема эта следует из теоремы I, т. к. циклоида — частный случай эпициклоиды.

Теорема VI. Радиус кривизны циклоиды делится мгновенным центром первого порядка на равные части.

Из (67)

$$lim\left[\frac{M\mu}{MO_1}\right]_{R=\infty} = lim\left[\frac{2(R+r)}{R+2r}\right]_{R=\infty} = 2.$$

Теорема VII. Центр кривизны эвольвенты круга в данной точке совпадает с м. ц. 1 п. с. д. п. В самом деле, эвольвента круга — частный вид эпициклоиды, когда рулетта, соответствующая данному перемещению, прямая; поэтому из (67):

$$lim\left[\frac{M\mu}{MO_1}\right]_{r=\infty} = lim\left[\frac{2(R+r)}{R+2r}\right]_{r=\infty} = 1.$$

Теорема VIII. Обыкновенная эпициклоида имеет точки возврата первого вида.

Теорема IX. Удлиненная и сокращенная эпициклоиды не имеют точек возврата.

Так как только точки рулетты могут совпасть с мгновенным центром 1-го порядка, то только обыкновенная эпициклоида имеет точки возврата 1-го вида.

Теорема X. Обыкновенная эпициклоида не имеет точек возврата 2-го вида.

В самом деле,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{K} \neq 0.$$

Теорема XI. Сокращенные эпициклоиды имеют точки перегиба.

Теорема XII. Обыкновенная и удлиненная эпициклоиды не имеют точек перегиба.

Из

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{K} = \frac{1}{O_1O_2}$$

следует:

$$r < O_1O_2$$

по O_1O_2 — диаметр окружности изгибов, соприкасающейся с рулеттой в м. ц. 1 п. с. д. п.

Для того же, чтобы точка представляла собою точку перегиба, необходимо, чтобы описывающая точка попала на окружность изгибов, что возможно для точек M, удовлетворяющих условию

$$MO_r < r,$$

откуда и следует справедливость последних двух предложений.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих предложений.

Теорема XIII. Обыкновенная циклоида имеет точки возврата первого вида.

Теорема XIV. Удлиненная и сокращенная циклоиды не имеют точек возврата первого вида.

Теорема XV. Обыкновенная циклоида не имеег точек возврата второго вида.

Теорема XVI. Сокращенная циклоида имеет точки перегиба.

Теорема XVII. Удлиненная и обыкновенная циклоиды не имеют точек перегиба.

Теорема XVIII. Подэры, описанные точками рулетты при перемещении, рассмотренном в теореме VIII (гл. III), имеют точки возврата первого вида, но не имеют точек перегиба.

Теорема XIX. Эллипс — закрытая кривая.

Так как элипс описывается при перемещении, при котором концы стержня A и B описывают прямые линии (см. черт. 22), следовательно A и B описывают прямые линии, а O_1 — мгновенный центр, то окружность диаметра AB — окружность изгибов.

Так как эллипсы описываются внутренними точками AB, то эллипс в любой точке обращен своей выпуклостью к м. ц. 1 п. с. д. п., т.-е. эллипс — закрытая кривая.

Лемма. Неподвижная точка, через которую проходит прямая во всех положениях, которые она занимает при перемещении в своей плоскости, принадлежит окружности центров.

В самом деле, неподвижную точку можно рассматривать, как огибающую последовательные положения прямой, которые она занимает при перемещении в своей плоскости плоской неизменяемой фигуры, с которой прямая эта неизменно связана.

С другой стороны, радиус кривизны траэктории неподвижной точки есть нуль, т.-е. данная точка совпадает с центром кривизны, который, на основании теоремы VI, лежит на окружности центров.

Теорема XX. Геометрическое место точек перегиба всех конхоид, образованных различными точками M луча OM, точка которого O' описывает прямую AD, а другая точка O неподвижна,— полукубическая парабола.

В самом деле, окружность, проведенная через BO' и O_1, есть окружность изгибов: точка O' принадлежит окружности изгибов, как описывающая прямую линию, точка B, как симметричная с O, принадлежащая, на основании леммы, к окружности центров, O_1, как м. ч. 1 п. с. д. п. (см. черт. 23).

Отсюда, для того, чтобы точка M была точкой перегиба, необходимо, чтобы M удовлетворяла условию

$$OM \,.\, OO' = OB \,.\, OO_1 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (69)$$

как произведение секущей окружности на ее внешнюю часть.

Обозначив через ϱ и α полярные координаты точки M, а OA — через a, найдем

$$OO = \frac{a}{\cos\alpha}; \quad OO_1 = a\,\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}; \quad OB = 2\,OJ;$$

поэтому (69) запишется:

$$\varrho^3 \cos^3\alpha = 2a\varrho^2 \sin^2\alpha,$$

в Декартовых координатах

$$x^3 = 2ay^2.$$

Глава VII

О ЗАКОНЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Основная теорема[1]) этой главы основана на свойствах движения (см. леммы I и II). Свойства эти связаны с понятиями о направлении плоскости. За направление плоскости (Umlaufsinn in der Ebene) считаем направление круга, принадлежащего этой плоскости. Направление же круга определим указателем (Indikatrix) последовательности вершин треугольника, вписанного в окружность данного круга, т. е. одним из двух видов циклического порядка вершин треугольника:

$$(A_1A_2A_3) = (A_2A_3A_1) = (A_3A_1A_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

или

$$(A_1A_3A_2) = (A_3A_2A_1) = (A_2A_1A_3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Указатели, соответствующие (1) и (2), называем сопряженными.

В связи с этим, стороны имеют различные направления. Одну из этих сторон называем верхней или внешней стороной плоскости, а другую — нижней или внутренней.

Введем понятие об отображении плоскости самой в себе.

Под отображением плоскости самой в себе будем подразумевать отображение верхней (внешней) стороны одной из совпадающих плоскостей на нижней (внутренней) стороне другой или обратно. Одну из сторон, участвующих в отображении, назовем отображающей, а другую — отображенной плоскостью.

Движения, соответствующие прямому и обратному топологическому[2]) отображению, представляют собою прямое и обращенное движение.

---

[1]) Теорема эта доложена в заседании Харьковского математического общества от 2/V 1925 г.

[2]) Под топологическим отображением, согласно Brouwer'y, подразумеваем двуоднозначное и непрерывное преобразование.

В прямом движении отображающей стороной будем считать верхнюю (внешнюю) сторону, а в обращенном движении — нижнюю (внутреннюю) сторону плоскости.

Пусть имеет место движение плоскости самой в себе. Тогда имеет место также обращенное движение. Плоскость подвижную при прямом и неподвижную при обращенном движении назовем P_M^F, а плоскость, подвижную при обращенном и неподвижную при прямом — P_F^M. Таким образом, верхняя сторона P_F^M — отображающая плоскость при прямом, а нижняя сторона P_M^F — отображающая плоскость в обращенном движении.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 1. Движение плоскости самой в себе сохраняет направление отображающей плоскости.

В самом деле, согласно определению движения[1]), движение сохраняет направление Жардановой кривой, принадлежащей отображающей плоскости, которая топологически и в отношении циклического порядка эквивалентна окружности[2]).

Замечание 1. Направление векторов, рассматриваемых при движении, определяем направлением отображающей плоскости, соответствующей данному движению. Законность нашего определения следует из леммы.

Лемма 2. Если при движении плоскости самой в себе P_F^M и P_M^F получили свойства E_F^M и E_M^F, то при обращенном движении P_F^M и P_M^F обмениваются своими свойствами[3]). Предложение это непосредственно следует из того, что в обращенном движении P_F^M и P_M^F меняются своими ролями.

---

[1]) См. D. Hilbert. «Ueber die Grundlagen der Geometrie», Math. Annalen 56, стр. 383 — 386.

[2]) См. F. Riesz. Ueber einen Satz der Analysis situs, Math. Annalen. Bd. 59, p. 409, 1909.

[3]) Лемма эта изложена нами в статье «Основания плоской кинематической геометрии и приложение ее к исследованию плоских кривых», премированной Новороссийским Университетом в марте 1913 года золотой медалью. Впоследствии лемма эта была высказана нами в заседании Математического Отделения Новороссийского Общества Естествоиспытателей 5 декабря 1914 года. Указанная работа по условиям военного времени не могла быть своевременно напечатана.

Замечание 2. Из этой теоремы вытекает предложение Шаля: «при обмене подвижностью плоскостей, участвующих в перемещении плоскости самой в себе, центроиды меняются ролями» [1]).

Теорема 1. Если при движении плоскости самой в себе имеет место тождественно:

$$U(V_M, V_F) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

где V_F и V_M — плоские векторы, принадлежащие соответственно плоскостям P_M^F и P_F^M, а U — функция, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между векторами V_M и V_F, тогда имеет также место тождественно:

$$U(-V_F, V_M) = 0; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

В самом деле, пусть движению плоскости самой в себе в P_M^F и P_F^M соответствуют векторы V_M и V_F $(i = 1,2.\ldots.n)$, удовлетворяющие

$$U(V_M, V_F) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Тогда при обращенном движении P_M^F и P_F^M обмениваются имеющими в них место векторами.

С другой стороны, определив направление векторов при помощи направления отображающей плоскости, соответствующей данному движению, легко видеть, что векторы, соответствующие прямому и обращенному движению, будут характеризоваться сопряженными указателями: отображающие плоскости в прямом и обращенном движении имеют противоположные направления.

Так как, кроме того, обращенное движение представляет собой топологическое отображение, то и в этом случае будет иметь место соотношение вида (5), в котором V_F и V_M меняются ролями, а знаки их меняются на противоположные, иными словами при обращенном движении имеет место

$$U(-V_F, -V_M) = 0; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Но на ряду с прямым движением имеет место и обращенное движение, а потому теорема верна.

---

[1]) См. «Aperçu historique des methodes en géométrie» M. Chasles. Paris, 1875, p. 477 — 482.

Примечание. Приложения этой теоремы, как и ее обобщения, изложены в нашей статье: «Об одном дуалистическом законе и его приложениях», которая напечатана в III томе журнала: «Наукові записки науково-дослідчих катедр України»[1]) за 1928 г.

В этой статье наша теорема является следствием другой более общей теоремы, доказанной на основании других более простых предпосылок.

Следствие I. Если движение плоскости самой в себе характеризуется соотношением:

$$U(V_F) = B(V_M) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

то имеет место также тождественно:

$$U(-V_M') = B(-V_M) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

где B, как и U, — операция, не зависящая от вектора перемещения.

Следствие II. Приведенные предложения сохраняют силу, если в выражения (3), (4), (7), (8) подставить вместо V_F пару чисел (x, y), а вместо V_M — (ξ, η), $(x, y, \xi, \eta$ — Декартовы координаты заданных точек.

Последнее предложение основано на том, что между системой векторов и системой пар чисел можно установить двуоднозначное соответствие.

Следствие III. Пусть имеет место движение плоскости самой в себе. Предположим, что это перемещение характеризуется соотношениями:

$$B(\xi, \eta, a) = 0\,; \quad U(x, y, a) = 0\,;$$

тогда имеет также место тождественно:

$$B(-x, -y, -a) = 0\,; \quad U(-\xi, -\eta, -a) = 0\,;$$

x, y, ξ, η — Декартовы координаты данной точки, α — параметр, знак которого определяется направлением вектора движения.

Следствие IV. Если при движении плоскости самой в себе имеют место тождественно:

$$U(x, y) = 0\,; \quad B(\xi, \eta) = 0\,,$$

---

[1]) См. также нашу статью «Ueber ein schiefsymmetrisches Dualitätsgesetz und seine Anwendungen», Rendiconti del circolo matematico di Palermo, T. 51, p. 317, 1817.

то имеет место также тождественно:

$$U(-\xi, -\eta) = 0; \quad B(-x, -y) = 0;$$

Следствие V. Если при движении плоскости самой в себе имеет место тождественно:

$$U(\xi, \eta, x, y, a) = 0,$$

то имеет место также тождественно:

$$U(-x, -y, -\xi, -\eta, -a) = 0$$

Следствие VI. Если при движении плоскости самой в себе имеет место тождественно:

$$U(\xi, \eta, x, y) = 0,$$

то имеет место также тождественно:

$$U(-x, -y, -\xi, -\mu) = 0$$

Следствие VII. Пусть при движении плоскости самой в себе имеют место тождественно:

$$B(\xi, \eta, \zeta) = 0; \quad U(x, y, z) = 0,$$

то имеют место также тождественно:

$$B(-x, -y, z) = 0; \quad U(-\xi, -\eta, \zeta) = 0;$$

($x, v, z, \xi, \eta_1 \zeta$ — трилинейные координаты данной точки, U и B сохраняют вышеуказанные значения).

Следствие VIII. Если при движении плоскости самой в себе имеет место тождественно:

$$B(\xi, \eta, \zeta) = U(x, y, z),$$

то имеет также место тождественно:

$$B(-x, -y, z) = U(-\xi, -\eta, \zeta)$$

Из нашей теоремы вытекает еще следующее предложение, имеющее общий характер.

Замечание 3. Из приведенной теоремы и ее следствий вытекает двойственный характер и взаимообратимость теорем плоской кинематической геометрии; например, теоремы об окружностях Mannheim'a, на основании следствия IV, вытекают одна из другой.

Точно также на основании следствия VII вытекают одна из другой следующие две теоремы:

а) Если данная точка описывает прямую

$$ux + vy + wz = 0,$$

то соответствующий центр кривизны описывает коническое сечение Rivals'a:

$$uk\xi\eta + vk\eta^2 - w(\xi^2 + \eta^2 - k\eta\zeta) = 0$$

в) Если центр кривизны описывает прямую

$$u\xi + v\eta - w\zeta = 0,$$

то соответствующая точка описывает кривую [1]

$$ukxy + vky^2 - w(x^2 + y^2 + kyz) = 0.$$

Точно также можно показать взаимообратимость других теорем кинематической геометрии, приведенных в прежних главах.

Замечание 4. Следствия V, VI, VIII дают возможность непосредственно преобразовывать, а иногда и разрешать системы равенств, имеющих место при движении плоскости самой в себе, например, из:

$$\xi = \frac{kxy}{x^2 + y^2 + ky}; \quad \eta = \frac{ky^2}{x^2 + y^2 + yx},$$

выражающих центр кривизны траэктории, описанной точкой плоскости, движущейся в своей плоскости, где ξ, η — координаты центра кривизны, а x, y — координаты движущейся точки, вытекает, на основании следствия VI,

$$x = -\frac{k\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2 - k\eta}; \quad y = -\frac{k\eta^2}{\xi^2 + \eta^2 - k\eta}$$

Аналогично из:

$$\xi = x\cos a + y\sin a; \quad \eta = -x\sin a + y\cos a$$

на основании следствия V вытекает:

$$x = \xi\cos a - \eta\sin a; \quad y = \xi\sin a + y\cos a.$$

Точно также на основании следствия VIII из:

$$\xi x^2 + \xi y^2 + kyz\xi = kxyz; \quad \eta x^2 + \eta y^2 + k\eta yz = -ky^2z$$

---

[1] См. G. Koenigs. Leçons de cinématique, p. 445.

вытекает:

$$-\xi^2 x - y^2 x + k\eta x\xi = k\xi\eta\zeta; \quad -\xi^2 y - \eta^2 y + k\eta y\zeta = -k\eta^2\zeta$$

Замечание 5. Нетрудно убедиться, что уравнение траэктории, описанной при обращенном Кардановом движении, может быть получено, как следствие из уравнения траэктории, описанной при прямом движении. Действительно, движение это, как известно, заключается в том, что две точки M_1 и M_2 неизменяемого стержня движутся по двум взаимно-перпендикулярным прямым. Приняв эти прямые за неподвижные оси абсцисс и ординат, а за начало подвижных осей средину отрезка M_1M_2, обозначив при этом расстояние между точками M_1 и M_2 через 2a, можно показать, что кривая, описанная точками прямой M_1M_2 записывается[1]:

$$x^2\{(\xi-a)^2+\eta^2\}-4a\eta xy+y^2\{(\xi+a)^2+\eta^2\}=$$
$$=[\xi^2+\eta^2-a^2]^2; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

где x, y—неподвижные координаты, а ξ, η—подвижные координаты данной точки прямой M_1M_2.

Кривая эта, как нетрудно видеть, есть эллипс. Так как a можно рассмотреть, как параметр, то на основании следствия 5 получим, что в обращенном движении траэктория имеет вид:

$$(-\xi)^2\{-x+a)^2+(-y)^2\}-4(-a)(-y)(-\xi)(-\eta)+$$
$$(-\eta)^2\{-x-a)^2+(-y)^2\}=\{(-x)^2+(-y)^2-(-a)^2,$$

т.-е. $$\xi^2\{(x-a)^2-y^2\}-4a\xi\eta y+\eta^2\{(x+a)^2+y^2\}=$$
$$=(x^2+y^2-a^2)^2,$$

а это кривая четвертого порядка.

Иными словами, кривая, описанная точкой прямой в обращенном движении, есть улитка Паскаля.

---

[1]) Ср. Г. К. Суслов. Кинематика, стр. 97.

Глава VIII

О ПЛОСКОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ, ИМЕЮЩЕМ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И МНИМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Введем следующие определения:

1. Треугольник имеет вещественную или мнимую вершину, если вершина его есть вещественная или мнимая точка.

2. Треугольник содержит данную прямую, если прямая эта — сторона данного треугольника.

Установим следующие предложения.

Теорема I. Для того, чтобы мнимая прямая

$$(\alpha \pm \beta i) x + (\gamma \pm \delta i) y + \varepsilon \pm \eta i = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

содержала пару сопряженных точек:

$$(u_1 + iv_1,\ u_2 + iv_2) \text{ и } (u_1 - iv_1,\ u_2 - iv_2) \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты этой прямой удовлетворяли условию:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

В самом деле, из условия вытекает:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha \pm \beta i)\ (u_1 + iv_1) + (\gamma \pm \delta i)\ (u_2 + iv_2) + \varepsilon \pm \eta i = 0 \\ (\alpha \pm \beta i)\ (u_1 - iv_1) + (\gamma \pm \delta i)\ (u_2 - iv_2) + \varepsilon \pm \eta i = 0 \end{aligned}\right\} \; . \quad (3)$$

т. е., что система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha u_1 - \beta v_1 + \gamma u_2 - \delta v_2 + \varepsilon = 0 \\ \beta u_1 + \alpha v_1 + \delta u_2 + \gamma v_2 + \eta = 0 \\ \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma u_2 + \delta v_2 + \varepsilon = 0 \\ \beta u_1 - \alpha v_1 + \delta u_2 - \gamma v_2 + \eta = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

созместна и однозначна, для чего необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta & \gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & -\alpha & \delta & -\gamma \end{vmatrix} = 4\,(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \neq 0 \; . \quad (5)$$

т.-е., что $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Теорема II. Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

то мнимая прямая не содержит ни одной пары сопряженных мнимых точек.

Пусть имеет место (6), тогда на основании (5)

$$\Delta = 0,$$

т.-е. система (4) несовместная или неопределенная.

Обнаружим, что в данном случае имеет место несовместность.

В самом деле, из (6)

$$\alpha\delta = \beta\gamma,$$

что возможно при неравенстве нулю ни одного из множителей, а также в случаях их равенства нулю.

В первом случае

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta};$$

следовательно, все характеристические определители 4-го порядка и определители 3-го порядка равны нулю.

Т. к. α и β, γ и δ одновременно не равны нулю, то среди определителей 1-го порядка есть по крайней мере один неравный нулю, например:

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} \neq 0.$$

Соответствующий ему характеристический определитель:

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\beta\varepsilon \\ \beta & \alpha\eta \\ \alpha & \beta\varepsilon \end{vmatrix} = 2\beta(\varepsilon\beta - \alpha\eta) \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

равен нулю, если:

$$1)\ \varepsilon\beta - \alpha\eta = 0$$

или

$$2)\ \varepsilon = \eta = 0$$

В первом случае уравнение (1) запишется:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \pm i\right)\beta x + \left(\frac{\alpha}{\beta} \pm i\right)\delta y + \left(\frac{\alpha}{\beta} \pm i\right)\eta = 0,$$

а во втором

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \pm i\right)\beta x + \left(\frac{\alpha}{\beta} \pm i\right)\delta y = 0,$$

т.-е. характеристические определители 3-го порядка тогда и только тогда равны нулю, когда (1) выражает вещественную прямую.

Аналогичными соображениями обнаруживается несовместимость (4) и во втором случае.

Теорема III. Мнимая прямая содержит не больше одной пары сопряженных мнимых точек.

В самом деле, коэффициенты прямой (1) удовлетворяют одному из условий:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\alpha\beta - \beta\gamma \neq 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

при которых мнимая прямая не имеет больше одной пары сопряженных мнимых точек.

Теорема IV. Для того, чтобы мнимая прямая

$$(\alpha \pm \beta i)\, x + (\gamma \pm \delta i)\, y + \varepsilon \pm \eta i = 0$$

пересекалась с сопряженной с ней прямой,

$$(\alpha \mp \beta i)\, x + (\gamma \mp \delta i)\, y + \varepsilon \mp \eta i = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициент этой прямой удовлетворял условию

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

В самом деле, для того, чтобы прямые

$$\left.\begin{aligned} (\alpha + \beta i)\, x + (\gamma + \delta i)\, y + \varepsilon + \eta i = 0 \\ (\alpha - \beta i)\, x + (\gamma - \delta i)\, y + \varepsilon - \eta i = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

имели общую точку, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение:

$$\begin{vmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ \alpha - \beta i & \gamma - \delta i \end{vmatrix} = 2i\,(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$$

Теорема V. Мнимая прямая пересекается с сопряженной с ней прямой в вещественной точке.

В самом деле, координаты точки пересечения прямых (10) выражаются:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon + \eta i & \gamma + \delta i \\ \varepsilon - \eta i & \gamma - \delta i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ \alpha - \beta i & \gamma - \delta i \end{vmatrix}} = \frac{\varepsilon\delta - \gamma\eta}{\alpha\delta - \beta\gamma};\ y = \frac{\alpha\eta - \beta\varepsilon}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

Теорема VI. Пара совпадающих сопряженных мнимых точек есть вещественная точка и обратно.

В самом деле, пара совпадающих точек удовлетворяет условию:

$$u_1 + iv_1 = u_1 - iv_1, \quad u_2 + iv_2 = u_2 - iv_2\,;$$

откуда

$$2v_1 = 0 \text{ и } 2v_2 = 0,$$

т.-е. пара точек

$$(u_1 + iv_1,\ u_2 + iv_2), \quad (u_1 - iv_1,\ u_2 - iv_2)$$

представляет собою вещественную точку (u_1, u_2).

Справедливость обратной теоремы вытекает из эквивалентности вещественной точки $(u_1 u_2)$ паре сопряженных мнимых точек $(u_1 + iv_1,\ u_2 + iv_2)$, $(u_1 - iv_1,\ u_2 - iv_2)$, удовлетворяющих условиям

$$2v_1 = 2v_2 = 0.$$

Теорема VII. Сопряженные мнимые точки, принадлежащие мнимой прямой, совпадают.

Из условия следует, что

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Следовательно, прямая (1) (теор. IV и V) содержит вещественную точку, которая (теор. VI) есть пара совпадающих сопряженных мнимых точек.

С другой стороны, прямая (1) не содержит больше одной пары (теор. I) сопряженных точек; поэтому указанные точки совпадают.

Теорема VIII. Мнимая прямая содержит не больше одной вещественной точки.

В самом деле, мнимая прямая содержит не больше одной пары сопряженных точек, которые (теор. VII) совпадают, т.-е. представляют собою вещественную точку (теор. VI).

Теорема IX. Треугольник, все вершины которого вещественны, не содержит мнимых прямых.

В самом деле, из предположения, что треугольник содержит хотя бы одну мнимую прямую, следует, что мнимая прямая содержит две вещественные точки.

Теорема X. Если число мнимых вершин не меньше двух, то число вещественных сторон не больше единицы.

В самом деле, из предположения, что число вещественных сторон равно двум, следует, что мнимая прямая содержит две вещественные точки.

Теорема XI. Если треугольник имеет сопряженные мнимые вершины, то число мнимых сторон не больше двух.

Если бы число сторон было больше двух, то мнимая прямая содержала бы две сопряженные несовпадающие точки.

Теорема XII. Треугольник, одна вершина которого вещественная точка, а две другие вершины — сопряженные мнимые точки, содержит одну вещественную и две мнимые стороны.

В самом деле, стороны треугольника допускают следующие комбинации из вещественных и мнимых сторон: 1) три вещественные; 2) две вещественные и одна мнимая; 3) три мнимые; 4) одна вещественная и две мнимые.

Первые три комбинации противоречат X и XI теоремам, а потому возможна четвертая комбинация, которая, как легко видеть, действительно имеет место.

Замечание. Последнее предложение имеет очень важное значение при исследовании свойств перемещения гомографически изменяемой системы точек в своей плоскости.

Соображениями, аналогичными приведенным в последних теоремах, можно установить, при каких комбинациях из вещественных и мнимых вершин существует треугольник, и при каких условиях треугольник невозможен [1]).

---

1) Результаты этой главы изложены в нашей статье: «О плоском Евклидовом треугольнике, имеющем вещественные и мнимые элементы», напечатанной в «Известиях Екатеринославского Горного Института» за 1923 год.

Глава IX

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ПЛОСКОЙ ГОМОГРАФИЧЕСКИ-ИЗМЕНЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Перемещением плоской гомографически-изменяемой системы точек будем называть такое перемещение, при котором прямая, принадлежащая этой системе точек, не меняет своей кривизны во всех своих точках, т.-е. прямая остается прямой.

Отнеся нашу систему точек к совпадающей с ней подвижной плоскости и выбрав на подвижной и неподвижной плоскостях соответственно оси координат O_1uv и O_2xy, можно уравнения, связывающие x и y — координаты точек движущейся фигуры относительно неподвижных осей и u, v — координаты точек системы относительно подвижных осей, записать следующим образом:

$$x=\frac{l_1u+m_1v+n_1}{l_3u+m_3v+n_3};\quad y=\frac{l_2u+m_2v+n_2}{l_3u+m_3v+n_3};\quad \ldots (1)$$

отсюда, введя трилинейные координаты, напишем:

$$\frac{x}{z}=\frac{l_1u+m_1v+n_1w}{l_3u+m_3v+n_3w};\quad \frac{y}{z}=\frac{l_2u+m_2v+n_2w}{l_3u+m_3v+n_3w};$$

Обозначив:

$$lz=l_3u+m_3v+n_3w,$$

можно уравнениям преобразования (1) дать следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} lx&=l_1u+m_1v+n_1w;\\ ly&=l_2u+m_2v+n_2w;\\ lz&=l_3u+m_3v+n_3w;\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (2)$$

Из этих выражений гомографического преобразования непосредственно следует указанное выше свойство прямой при перемещении плоской гомографически-изменяемой системы точек.

В с. д. уравнение прямой в неподвижных трилинейных координатах имеет вид:

$$ax + by + cz = 0; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Уравнение это, на основании (2), записывается:

$$(l_1 a + l_2 b + l_3 c)\, u + (m_1 a + m_2 b + n_3 c)\, v + (n_1 a + n_2 b + n_3 c)\, w = 0;$$

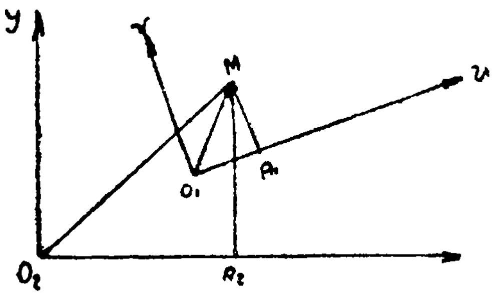
но это уравнение — первой степени относительно подвижных координат u, v, w, т.-е. выражает уравнение прямой.

Напомним теперь некоторые определения понятий о двойных образах.

1. Точки, представляющие различные положения, занимаемые одной и той же точкой перемещающейся фигуры, называют гомологичными точками.

2. Прямая, соединяющая две гомологичные точки, — гомологичная прямая.

3. Совпадающая пара гомологичных точек — двойная точка.



Черт. 27

4. Прямая, соединяющая две двойные точки, — двойная прямая, представляющая собою две совпадающие гомологичные прямые.

5. Треугольник, стороны которого суть двойные прямые, называют двойными треугольниками.

Теорема I. Всякому перемещению[1]) гомографически изменяемой системы точек в своей плоскости соответствует одна или три вещественные двойные точки.

Иными словами, нужно доказать, что при перемещении плоской гомографически-изменяемой системы точек существуют одна или три вещественные точки, принадлежащие этой системе, которые совпадают с гомологичными им точ-

[1]) Под «всяким перемещением» будем подразумевать всевозможные перемещения, кроме тех, которые исключим при ходе доказательства.

ками в любом положении, занимаемом при перемещении этой системой.

Нетрудно видеть, что координаты этих точек по отношению к подвижным осям пропорционально их координатам по отношению к подвижным осям.

В самом деле, пусть неподвижные координаты двойной точки M будут „x“ и „y“, а подвижные „u“ и „v“, найдем (см. черт. 27) из треугольников O_2MA_2 и O_1MA_1

$$\frac{MA_2}{MA_1}=\frac{O_2A_2}{O_1A_1}=\frac{O_2M}{O_1M}$$

Обозначив

$$\frac{O_2M}{O_1M}=k;$$

Получим

$$x=ku; \qquad y=kv;$$

Так как

$$\frac{x}{z}=\frac{u}{\zeta}$$

то

$$\frac{z}{\zeta}=\frac{x}{u}$$

т. е.

$$\frac{z}{\zeta}=k$$

и

$$z=k\zeta$$

поэтому

$$lx=lku$$

$$ly=lkv$$

$$lz=lk\zeta$$

введя

$$S=kl$$

уравнения этих двойных точек (2) запишутся:

$$\left.\begin{aligned} lx&=Su=l_1u+m_1v+n_1w;\\ ly&=Sv=l_2u+m_2v+n_2w;\\ lz&=Sw=l_3u+m_3v+n_3w;\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} l_1 - S & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_3 - S & n_2 \\ l_3 & m_2 & n_3 = S \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

Уравнение (4) называется характеристическим уравнением гомографического преобразования.

Уравнение (4), имеющее 3 корня, не имеет нулевых решений; в противном случае:

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

что исключает взаимно-однозначное соответствие, существующее между точками изменяемой системы, подвергаемой коллинеарному преобразованию.

Если $l_2 = m_1$; $l_3 = n_1$, $m_3 = n_2$, то (4) представляет собою симметрический определитель Cauchy, который имеет три вещественных корня. Исключая из рассмотрения случай кратных корней, найдем, что значения S, удовлетворяющие (3), суть три различных вещественных числа, или два вещественных и одно мнимое, следовательно, данному перемещению соответствуют три вещественных точки или одна вещественная и две мнимые сопряженные двойные точки.

Теорема II. Всякому перемещению плоской коллинеарно-изменяемой системы точек в своей плоскости соответствует двойной треугольник.

Допустим противное: двойные точки, соответствующие перемещению, лежат на одной прямой. Тогда справедливы соотношения:

$$\left.\begin{aligned} u_1x_1 + v_1y_1 + w_1z_1 &= u_2x_1 + v_2y_1 + w_2z_1; \\ u_1x_2 + v_1y_2 + w_1z_2 &= u_2x_2 + v_2y_2 + w_2z_2; \\ u_1x_3 + v_1y_3 + w_1z_3 &= u_2x_3 + v_2y_3 + w_2z_3; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (6)$$

(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), — однородные координаты двойных точек, ибо двойная прямая удовлетворяет соотношению:

$$u_1x + v_1y + w_1z = u_2t + v_2v + w_2w \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}(u_1-u_2)x_1+(v_1-v_2)y_1+(w_1-w_2)z_1=0\\(u_1-u_2)x_2+(v_1-v_2)y_2+(w_1-w_2)z_2=0\\(u_1-u_2)x_3+(v_1-v_2)y_3+(w_1-w_2)z_3=0\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (8)$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

неравен нулю, ибо, в противном случае, уравнения (1) не установили бы взаимно-однозначного соответствия между (x, y, z) и (t, u, v).

Отсюда, (6) имеет только одну систему решений — нули; следовательно,

$$u_1=u_2; \quad v_1=v_2; \quad w_1=w_2,$$

т.-е. все точки двойной прямой (5) — двойные точки, что противоречит теореме I.

Теорема III. Двойной треугольник, соответствующий данному перемещению коллинеарно-изменяемой системы точек в своей плоскости, содержит одну или три вещественных прямых.

В самом деле, всякому перемещению гомографически изменяемой системы точек в своей плоскости соответствуют три вещественных двойных точки, или одна вещественная и две мнимые сопряженные точки.

В первом случае двойной треугольник содержит три вещественные прямые, а во втором — одну вещественную и две мнимые стороны.

Примечание. Приведенные три теоремы, представляющие собою аналитическое изложение предложений В. Лигина, высказанных им в его статье[1]: «Sur quelques propriétés géométriques du déplacement plan sur son plan», изложены в нашей статье[2]: «Об одном мемуаре Лигина».

Рассмотрим теперь частный случай перемещения плоской гомографической изменяемой системы точек — перемещение плоской подобно-изменяемой системы точек в своей плоскости.

[1]) Nouwelles annales de Mathématiques, 1873, т. XII, р. 481 — 494.

[2]) «Известия Екатеринославского Горного Института», 1923 г.

Установим теперь уравнения подобного преобразования.

Рассмотрим неподвижную плоскость, в которой задана координатная система. Пусть твердая (неизменяемая) система точек, содержащая координатную систему с осями, перемещается в плоскости, одновременно подвергаясь растяжению, переходит в систему точек, подобную системе, так что точке системы с координатами x, y соответствует точка системы с координатами ξ, η.

Нетрудно видеть, что связь между координатами x, y и ξ, η определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \lambda(\xi \cos\theta - \eta \sin\theta) \\ y &= b + \lambda(\xi \sin\theta + \eta \cos\theta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

где λ — множитель подобия, a, b — координаты подвижного начала, θ — угол между положительным направлением $O_1\xi$ и Ox.

Соотношения (9) в трилинейных (однородных) координатах записываются:

$$\left.\begin{aligned} \sigma x &= a\xi + \lambda\xi\cos\theta - \lambda\eta\sin\theta; \\ \sigma y &= b\xi + \lambda\xi\sin\theta + \lambda\eta\cos\theta; \\ \sigma z &= \zeta; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что (10) получаются из уравнений (2), когда

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= a; \quad m_1 = \lambda\cos\theta; \quad n_1 = -\lambda\sin\theta; \\ l_2 &= b; \quad m_2 = \lambda\sin\theta; \quad n_2 = \lambda\cos\theta; \\ l_3 &= 1; \quad m_3 = 0; \quad n_3 = 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

т.-е. (10) выражает собою гомографическое преобразование.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема IV. Всякому перемещению подобно изменяемой системы точек в своей плоскости соответствует одна вещественная и две мнимые двойные точки.

В самом деле, уравнения (3) для двойных точек в этом случае, на основании (11), имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} lx &= s\xi = \lambda\xi\cos\theta - \lambda\eta\sin\theta + a\xi; \\ ly &= s\eta = \lambda\xi\sin\theta + \lambda\eta\cos\theta + b\xi; \\ lz &= s\zeta = \zeta; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

а характеристическое уравнение гомографического преобразования (4) запишется:

$$\left.\begin{vmatrix} \lambda\cos\theta - S & -\lambda\sin\theta & a \\ \lambda\sin\theta & \lambda\cos\theta - S & b \\ 0 & 0 & 1 - S \end{vmatrix} = 0;\ \right\} \ldots (13)$$

т.- е.

$$(1 - S)\left[(\lambda\cos\theta - S)^2 + \lambda^2\sin^2\theta\right] = 0; \quad \ldots \quad (14)$$

Пусть $\theta \neq 0$ (случай $\theta = 0$ исключаем, т. к. он соответствует случаю перенесения, который мы не рассматриваем). Тогда $S = 1$ простой вещественный корень (14).

Другие два корня (14) имеют вид:

$$S = \lambda\cos\theta \pm \sqrt{\lambda^2\cos^2\theta - \lambda^2} = \lambda e^{\pm i\theta}; \quad \ldots \quad (15)$$

Отсюда, перемещению, определяемому при помощи (10), соответствует одна вещественная и две сопряженные мнимые двойные точки.

Теорема V. Всякому перемещению плоской подобно-изменяемой системы точек в своей плоскости соответствует одна вещественная двойная прямая[1]).

На самом деле, указанному в теореме перемещению соответствует одна вещественная и две сопряженные мнимые точки. Тогда, на основании теоремы XII (глава VIII), двойной треугольник, соответствующий перемещению подобно-изменяемой системы точек в своей плоскости, содержит только одну вещественную двойную прямую.

Примечание I. Как следует из соотношения (12), бесконечно-удаленная прямая $z = 0$ переходит в бесконечно-удаленную прямую $\zeta = 0$; иными словами, подобные преобразования характеризуются тем, что соответствующая двойная прямая — бесконечно-удаленная; прямая эта называется осью гомологии.

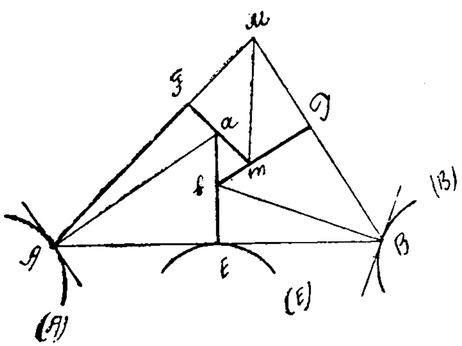
---

[1]) Результаты, касающиеся инвариантов гомотетичных преобразований, сообщены Днепропетровскому Физико-математическому Обществу 10/XI-1930 года.

Глава X

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ИЗМЕНЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ТОЧЕК В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

В этой и последующей главах займемся исследованием плоских кривых на основании свойств перемещения изменяемой системы точек. Метод этот разработан Mannheim'ом [1]).



Черт. 28

Решим следующую задачу. Пусть дана прямая AB, огибающая последовательные ее положения (E), точка касания этой кривой с AB, траэктории (A) и (B) точек A и B, а также нормали в этих точках. Требуется построить нормаль в точке M, когда прямая AB, принадлежащая треугольнику ABM, изменяется при перемещении по своей огибающей так, что треугольник ABM остается подобным первоначальной форме (см. черт. 28).

Так как при перемещении AB углы A и B — постоянны, то «a» — точка пересечения нормалей к (A) и (E) — мгновенный центр, соответствующий данному положению угла A, а «b» — точка пересечения нормалей к (B) и (E) — мгновенный центр, соответствующий углу B (см. главу II). Перпендикуляры aF и bG дают F и G — точки касания AM и BM с их огибающими. Т. к. угол M — постоянный, то пересечение

[1]) См. A. Mannheim. «Principes et développements de géométrie cinématique», Paris, 1894, а также L. Crelier. Géométrie cinémathique plane, Bienne, 1908.

aF и bG дают точку «m» — мгновенный центр. Отсюда mM — искомая нормаль.

Из решения этой задачи вытекают три теоремы, на которых основаны правила построения радиуса кривизны плоских кривых.

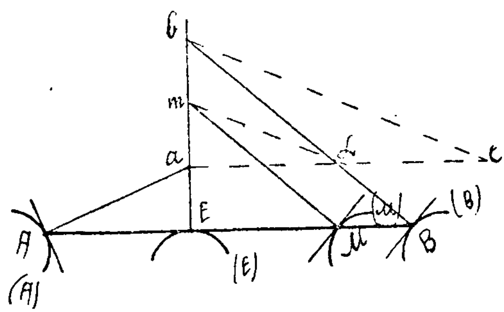
Теорема I. При перемещении в своей плоскости подобно-изменяемого треугольника отношение расстояния мгновенного центра, соответствующего данному углу, от мгновенных центров, соответствующих другим углам, равно отношению сторон, заключающих данный угол.

В самом деле, треугольники abm и ABM подобны, вследствие перпендикулярности их сторон; поэтому

$$\frac{am}{bm}=\frac{AM}{BM}.$$

Теорема II. Когда изменяемая прямая перемещается на трех заданных траекториях таким образом, что $\frac{AM}{MB}$ постоянно, то перпендикуляр к AB, пересекающий нормали к траекториям в точках, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{ma}{mb}=\frac{AM}{MB},$$



Черт. 29

пересекает прямую AB в точке ее касания с E.

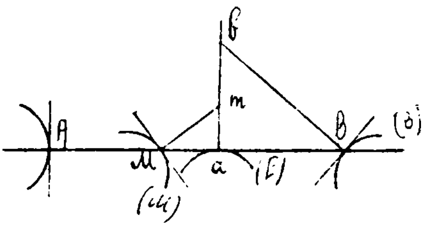
Пусть треугольник ABM сводится к прямой AB (см. черт. 29). Проводим ad параллельно AB, так что $aL = AM$ и $Le = MB$, потом b соединяем с e и из точки L проводим линию, параллельную eb и пересекающую нормаль к E в точке «m». Из подобия adm и aeb следует (см. черт. 27):

$$\frac{am}{mb}=\frac{AM}{MB},$$

но тогда $aE \perp AB$, что и требовалось доказать.

Теорема III. Когда перемещающаяся изменяемая прямая во всех занимаемых ею положениях пересекает три кривые таким образом, что к одной из них она постоянно нормальна, причем $\frac{AM}{MB} = const$, то перпендикуляр к AB, пересекающий нормали к (M) и (B) в точках, удовлетворяющих соотношению $\frac{am}{mb} = \frac{AM}{MB}$, встречают прямую AB в E, точке касания AB с (E) (см. черт. 30).

Точка эта — центр кривизны в A кривой, к которой AB нормальна. Пусть треугольник ABM сводится к прямой, совпадающей с нормалью к (A) в A (см. черт. 28). Тогда точки a и E совпадают и представляют собою точку касания нормали к (A) в A с ее огибающей (E). Тогда (E) — развертка кривой (A), а потому точка E или a — центр кривизны кривой (A) в A.



Черт. 30

Приложим теперь изложенные теоремы к построению центров кривизны некоторых кривых.

Центр кривизны эллипса

Пусть OD и OE — направление осей эллипса, а M — точка, касательная и нормаль в которой — ED и ABM. Прямая ABM во всех положениях, занимаемых ею при перемещении, пересекает три кривые: оси OD и OE и эллипс, причем к эллипсу она нормальна.

Кроме того, из уравнения эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

следует:

$$\frac{2x}{a^2} = \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

то-есть

$$y' = -\frac{b^3x}{a^2y}$$

Следовательно,

$$BM = |n| = \left| y\sqrt{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}} \right| = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{y}{y}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2} =$$

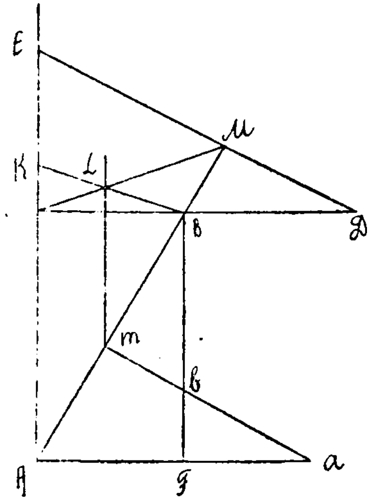
$$= \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4x^2 + u^4y^2}\,.$$

Аналогично можно показать, что

$$AM = \frac{1}{b^2}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}\,;$$

т.-е.

$$\frac{AM}{BM} = \frac{a^2}{b^2} = const\,.$$



Черт. 31

Таким образом, удовлетворяются условия III теоремы, а потому искомый центр кривизны точка «m» — основание перпендикуляра к AB, пересекающего в «b» нормаль FB к OD и в «a» — нормаль FA к OE, где

$$\frac{am}{bm} = \frac{AM}{BM}$$

(см. черт. 31).

Проведя прямую BL, перпендикулярную прямой AB, мы получаем:

$$\frac{LK}{LB} = \frac{ME}{MD} = \frac{mA}{mB},$$

где ME и MD — оси эллипса, описанного M; поэтому LM — диаметр его.

Отсюда, чтобы построить центр кривизны в данной точке эллипса, нужно провести нормаль в точке M. Из B — точки пересечения нормали с одной из его осей — восставляем перпендикуляр к нормали, пересекающей OM — диаметр эллипса в L. Точка пересечения линии, проведенной через точку L параллельно другой оси с нормалью ABM — искомый центр кривизны.

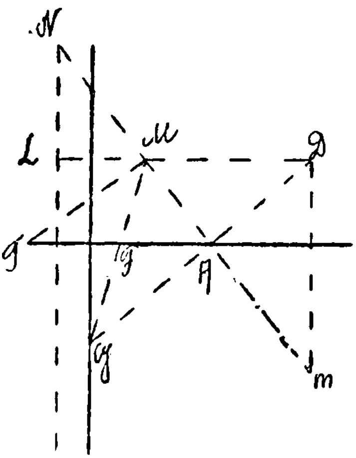
Легко показать справедливость следующих двух правил построения центра кривизны эллипса.

I. Проводят прямую EB; она пересекает MS, параллельную OD, в точке S. Прямая, проведенная из S параллельно OA, пересекает нормаль в точке M в искомом центре кривизны.

II. Ab и Ba — перпендикуляры к осям эллипса — пересекаются в точке F. Из этой точки опускают перпендикуляр на диаметр OM, который пересекает нормаль в точке M в искомом центре кривизны.

Центр кривизны параболы

Рассматривая параболу, как эллипс, центр которого, находясь на данной оси, бесконечно удален, можем построение выполнить согласно первому правилу построения центра кривизны эллипса. Из A, точки пересечения нормали с осью, проводим перпендикуляр к AM до пересечения его в D с диаметром MD. Из D восставляем перпендикуляр в MD, который пересечет нормаль в искомом центре кривизны.



Черт. 32

Докажем следующую теорему о радиусе кривизны параболы (см. черт. 32).

Теорема IV. Радиус кривизны параболы равен двойному отрезку нормали, заключенному между параболой и ее директрисой.

В самом деле,

$$ML = MF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

т. к. каждая точка кривой одинаково удалена от фокуса и директрисы.

Т. к. $\angle DMA = \angle AMG$, потому что касательная к параболе в данной точке образует одинаковые углы с фокальным радиусом-вектором и соответствующим ей диаметром, то треугольники AMD и AMG равны, поэтому (см. черт. 32)

$$MD = MG; \quad DA = AG \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Из (α), (β) и подобия $\triangle$-ков AGF и DGM следует:

$$MF = FG = \frac{1}{2} DM = ML$$

С другой стороны, из подобия $\triangle$-ков MNL и MDm:

$$\frac{MN}{Mm} = \frac{ML}{DM} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

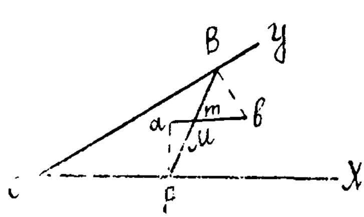
$$Mm = 2MN,$$

что и требовалось доказать.

Центр кривизны гиперболы

Как известно, отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ассимптотами, делится точкой касания на равные части. Мы можем этот отрезок рассмотреть, как треугольник ABM (см. черт. 28), в котором A и B совпадают. Отрезок этот — прямая, пересекающая при перемещении три кривые, из которых одна — огибающая прямой — наша гипербола, а две другие — ее ассимптоты. Так как

$$\frac{AM}{BM} = 1,$$



Черт. 33

т. е. постоянная величина, то на основании I теоремы —

$$\frac{am}{bm} = \frac{AM}{BM} = 1,$$

где m — точка пересечения нормалей в бесконечно-близких точках, которые представляют собою совпадающие точки M и E — искомый центр кривизны.

Отсюда центр кривизны гиперболы — середина отрезка нормали, заключенного между перпендикулярами и ассимптотами в точках пересечения их с касательной.

Центр кривизны эпициклоиды

Пусть O — центр базы, C — центр рулетты и M — данная точка (см. черт. 34).

Нормаль к эпициклоиде в точке M — MA, где A — мгновенный центр 1-го порядка, соответствующий данному перемещению.

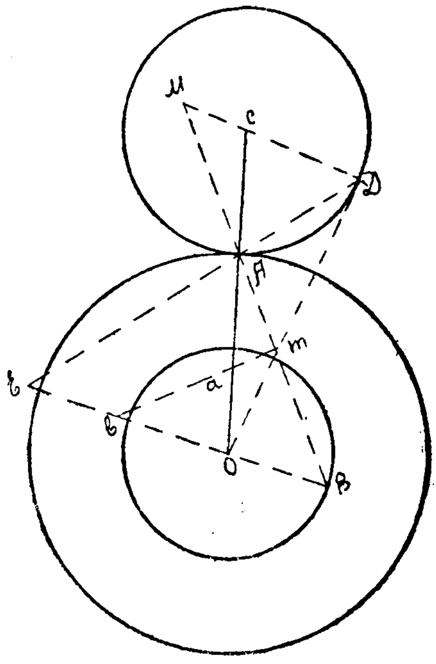
Проводим из O прямую, параллельную MC, до пересечения с MA в точке B. Тогда имеем

$$BO = \frac{MC \cdot OA}{CA} = const,$$

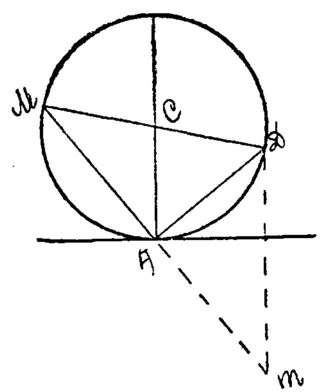
т. к. величины, входящие в правую часть нашего равенства, постоянны.

Опишем вокруг O окружность радиуса OB. Нормаль AM — прямая, которая при перемещении в своей плоскости пересекает три кривые: базу, окружность радиуса OB и эпициклоиду, описанную точкой M, причем во всех положениях нормальна эпициклоиде. Кроме того,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{CO} = \frac{r}{R+r} = const.$$



Черт. 34



Черт. 35

Тогда на основании III-й теоремы m — основание перпендикуляра к AM, пересекающего нормали AO и BO в точках a и b так, что $\frac{am}{mb} = \frac{AM}{MB}$ — центр кривизны эпициклоиды в точке M.

Отсюда, чтобы построить центр кривизны в данной точке эпициклоиды, проводим $AD \perp AM$, где D — точка пересечения AD с MC; потом соединяем D с O «m» — точка пересечения DO с нормалью AM — искомый центр кривизны. В самом деле,

$$\frac{am}{bm} = \frac{AD}{DE} = \frac{AM}{BM}.$$

Центр кривизны циклоиды

Т. к. циклоида — эпициклоида, база которой имеет центр кривизны в бесконечно-удаленной точке, то центр кривизны циклоиды строят по предыдущему правилу. В этом случае O — бесконечно-удаленная точка; поэтому нужно из D — точки пересечения $AD \perp AM$ с MC — провести линию, параллельную CA. Она пересекает AM нормаль к циклоиде в точке m — соответствующем центре кривизны циклоиды (см. черт. 35).

Глава XI

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ИЗМЕНЯЕМЫХ МНОГОУГОЛЬНЫХ[1] ФИГУР

Теорема I. Пусть заданы траэктории концов отрезка изменяемой прямой, перемещающейся в своей плоскости, и (E) — огибающая последовательные ее положения; тогда:

$$\frac{d(l)}{d(\omega)} = ab,$$

где l — длина отрезка, $d(\omega)$ — угол соприкосновения огибающей (E), ab — прямая, соединяющая мгновенные центры I-го порядка, соответствующие перемещениям отрезков AE и BE (см. черт. 36).

Пусть AB — данный отрезок и (E) — его огибающая. Пусть AE — неизменяемый отрезок, заключенный между A и E — точкой касания AB с огибающей (E), длина которой $= l$. При бесконечно-малом перемещении AE переходят в $A'E'$.

Пусть a — мгновенный центр, соответствующий данному перемещению. Угол $d(\omega)$, заключенный между aE' и aE — нормалями к E, равен углу, заключенному между касательными к (E) в E и E', т.-е. углу соприкосновения кривой (E). Легко видеть, что:

$$EE' = aE \, . \, d(\omega) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

BE, как неизменяемый отрезок при бесконечно малом перемещении, переходит в $B''E''$, и этому перемещению соответствует мгновенный центр «b»; поэтому

$$EE'' = bE \, . \, d(\omega) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Тогда и (1) и (2) полное изменение отрезка AB, равного l, выражается:

$$d(l) = E'E'' = (aE + BE) \, . \, d(\omega) = ab \, d(\omega),$$

[1]) Рассмотренные в этой главе задачи приведены также у Mannheim'a и L. Crelier'a (loc. cit.).

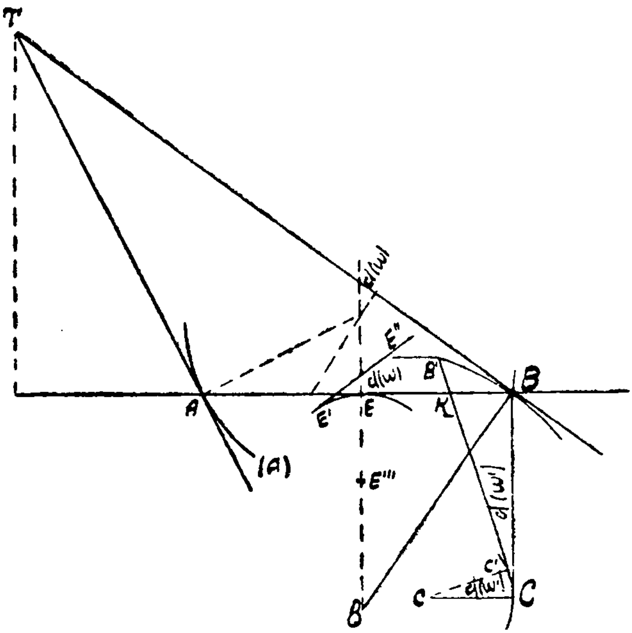
т. е.

$$\frac{d(l)}{d(\omega)} = ab. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Следствие. Если траектория (B) совпадает с огибающей (E), то

$$\frac{d(AE)}{d(\omega)} = aE''' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

где E''' — центр кривизны (E) в E.



Черт. 36

Теорема II. Пусть угол EBC — первоначальное положение изменяемого угла, (E) и (C) — огибающие его сторон и (B) — траектория вершины B. Тогда

$$d(EBC) = d(b)\left[\frac{1}{cB} - \frac{1}{bB}\right]$$

(см. черт. 36).

При переходе его в бесконечно-близкое положение $E'B'C$, получаем:

$$k + d(k) + m + d(\omega) = k + m + d(\omega') = 180^\circ,$$

где $d(\omega)$ и $d(\omega')$ — углы соприкосновения кривых (E) и (C),

$$\angle EBC = k, \quad \angle E'B'C' = k + d(k); \text{ и } m = \angle BKC;$$

следоват.

$$d(EBC) = d(\omega') - d(\omega) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Элемент траэктории $d(B)$, описанной вершиной B, можно рассматривать, как дугу окружности, описанную нормалью lB, вращающейся вокруг b — мгновенного центра, соответствующего углу $d(\omega)$, или нормалью CB, вращающейся вокруг мгновенного центра c, соответствующего углу $d(\omega')$; поэтому

$$d(B) = bBd(\omega) = cBd(\omega');$$

или

$$d(\omega) = \frac{d(B)}{bB}; \quad d(\omega') = \frac{d(B)}{cB}; \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Из (5) и (6) находим:

$$d(EBC) = d(B)\left[\frac{1}{cB} - \frac{1}{bB}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Примечание. Теорему II, на основании (5), можно еще так формулировать:

«Изменение перемещающегося угла равно разности углов соприкосновения огибающих его сторон».

Теорема III. Пусть задан перемещающийся отрезок AB, огибающая его E и траэктории его концов (A) и (B); тогда

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{AT}{BT} \cdot \frac{AE}{BE},$$

где AT и BT — касательные к (A) и (B) (см. черт. 36).

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным при выводе (6), имеем:

$$d(B) = bB \cdot d(\omega);$$

$$d(A) = aAd(\omega);$$

следовательно,

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{aA}{bB} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Кроме того (см. черт. 36),

$$\frac{aA}{AE} = \frac{AT}{TW}; \quad \frac{bB}{BE} = \frac{BT}{TW};$$

отсюда:

$$\frac{aA}{bB}=\frac{AT}{BT}\frac{AE}{BE}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

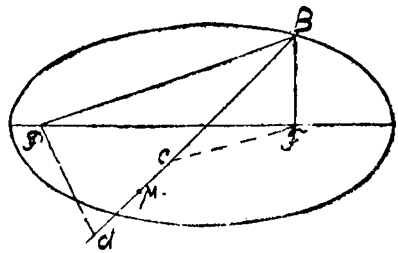
Из (8) и (9) находим:

$$\frac{d(A)}{d(B)}=\frac{AT}{BT}\cdot\frac{AE}{BE}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь на основании II-й теоремы следующее свойство центра кривизны эллипса.

Теорема IV. Данная точка эллипса гармонически связана с соответствующим ей центром кривизны по отношению к точкам пересечения перпендикуляров к радиусам-векторам, восстановленным из фокусов с нормалью в данной точке эллипса.



Черт. 37

Как известно, нормаль к эллипсу в данной точке — биссектриса угла FBF', образованного радиусами-векторами данной точки. (См. черт. 37).

При бесконечно малом перемещении точки B по эллипсу, угловые изменения $F'BC$ и Fbd равны; поэтому на основании (7) имеем:

$$d(B)\left[\frac{1}{dB}-\frac{1}{\mu B}\right]=d(B)\left[\frac{1}{\mu B}-\frac{1}{cB}\right];$$

где μ — центр кривизны, соответствующей точке B, а c и d — центры кривизны в точках F и F', огибающих стороны BF и BF', следовательно,

$$\frac{2}{\mu B}=\frac{1}{dB}+\frac{1}{cB}$$

Примечание. Из этой теоремы можно вывести известное правило построения центра кривизны в данной точке эллипса[1]).

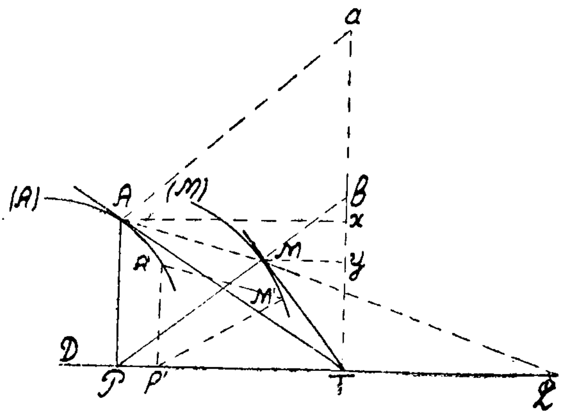
Займемся свойствами радиусов кривизны некоторых кривых.

[1]) Mannheim (loc. cit.), p. 48.

Теорема V. Пусть задана прямая D и кривая (A). На ординатах точки кривой, параллельных ординате PA, строим треугольники, подобные треугольнику APM так, что одна из их вершин M описывает кривую (M); тогда:

$$\frac{r}{r'}=\frac{AT^3}{MT^3}\cdot\frac{ML}{AL},$$

где r и r' — радиусы кривизны, а AT и MT — касательные к (A) и (M) в A и M, проведенные из некоторой точки T, лежащей на прямой D. (См. черт. 38).



Черт. 38

В самом деле, система треугольников, подобных APM, образует гомологичные фигуры, ось гомологии которых — бесконечно-удаленная прямая (см. главу VII, примечание II); поэтому треугольники эти, по теореме Дезарга, находятся в перспективном положении, т.-е. вершины их лежат на прямых, пересекающихся в одной точке. Касательная в A к (A) и к (M) в M — две из этих прямых; поэтому T — точка пересечения этих касательных — точка, в которой указанные прямые пересекаются.

На основании формулы (10):

$$\frac{d\,(A)}{d\,(M)}=\frac{AT}{MT}\cdot\frac{AE}{ME}.$$

Т. к. AM и MP во всех занимаемых ими положениях параллельны, то E — точка касания их с огибающей — бесконечно удалена; поэтому:

$$\frac{d(A)}{d(M)} = \frac{AT}{MT} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Кроме того, см. (6)

$$d(A) = rd(\omega); \quad d(M) = r'd(\omega');$$

$$d(\omega) = \frac{d(T)}{aT}; \quad d(\omega') = \frac{d(T)}{bT};$$

следовательно,

$$\frac{d(A)}{d(M)} = \frac{AT}{MT} = \frac{r \,.\, bT}{r'aT},$$

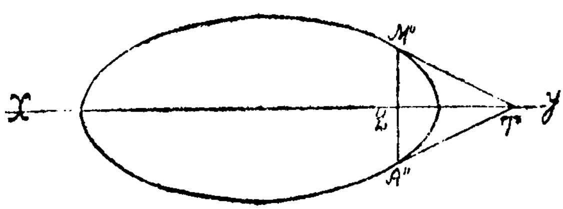
т.- е.

$$\frac{r}{r'} = \frac{AT}{MT}\frac{aT}{bT} = \frac{AT^3}{MT^3} \cdot \frac{ML}{AL}.$$

потому что из прямоугольников bMT и aAT, предполагая, что $\angle aTA = t$ и $\angle MTb = t'$, следует, что

$$AT = aT \cos t; \qquad \cos t = \frac{Tx}{AT};$$

$$MT = bT \cos t'; \qquad \cos t' = \frac{Ty}{MT}.$$



Черт. 39

Теорема VI. Радиусы кривизны двух точек эллипса относятся, как кубы отрезков касательных, заключенных между точкой их пересечения и точками касания.

Предположим, что (A) и (M) образуют эллипс, а прямая D — диаметр xy, сопряженный с хордами, параллельными $M''A''$. (См. черт. 39).

Тогда подобные треугольники сводятся к прямым, параллельным $M''A''$, причем $A''L = M''L$; поэтому на основании предыдущей теоремы (см. 12):

$$\frac{r_A''}{r_B''} = \frac{A''T^3}{M''T^3} \cdot \frac{M''L}{A''L} = \frac{A''T^3}{M''T^3};$$

Рассмотрим еще следующие два примера.

Пример I. Пусть дана прямая AB, соединяющая концы часовой и минутной стрелки. Определим точку E, в которой прямая касается своей огибающей. (См. черт. 40).

По условию, отрезок дуги, пройденный концом минутной стрелки, в 12 раз больше отрезка дуги, пройденного концом часовой стрелки, т.-е.

$$\frac{d(B)}{d(A)} = \frac{12}{1} = \frac{bB}{aA},$$

где a и b — точки, в которых нормали к (A) в A и к (B) в B пересекаются с нормалью (E) в E.

Из подобия aEA и bEB следует:

$$\frac{BE}{AE} = \frac{bB}{aB} = 12.$$

Отсюда E — точка, расстояние которой от A равно $\frac{AB}{13}$.

Отсюда, центр кривизны — точка, расстояние которой от E равно $\frac{ab}{13}$.

Пример II. Дан перемещающийся изменяемый треугольник, стороны которого касаются трех данных кривых; заданы также траэктории (A) и (B) вершин A и B. Найдем нормаль к кривой (M), описанной вершиной M.

На основании формулы (8):

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{aA}{bB}; \quad \frac{d(B)}{d(M)} = \frac{b'B}{mM}; \quad \frac{d(M)}{d(A)} = \frac{m'M}{a'A}$$

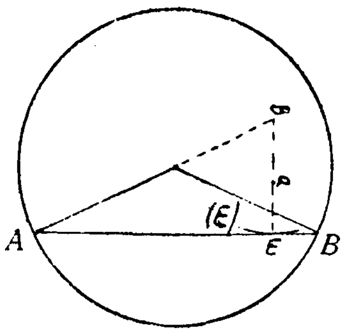
Отсюда:

$$\frac{aA}{a'A} \cdot \frac{b'B}{bB} \cdot \frac{m'M}{mM} = 1,$$

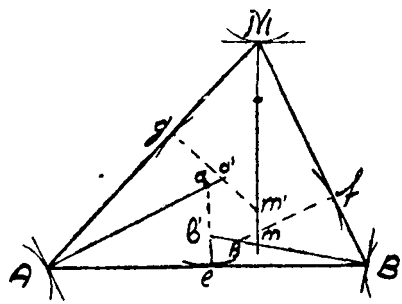
т.- е.

$$\frac{Mm}{Mm'} = \frac{aA\,.\,b'B}{a'A\,.\,bB}\,.$$

Соотношение это и дает возможность построить искомую нормаль.



Черт. 40



Черт. 41

Подобным образом, когда даны траэктории всех вершин треугольника, а также огибающие последовательные положения AM и BM, можно определить точку e, в которой третья сторона AB касается своей огибающей. Для этого опускают на AB перпендикуляр из какой-нибудь точки нормали (A) или к (B) так, чтобы

$$\frac{aA}{a'A} = \frac{Mm\,.\,bB}{Mm'\,.\,b'B}\,.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ